Differentialgeometrie [1]

Dr. Vadim Alekseev
LaTeX: B. Sc. Alexander Schulz

Version: 27. September 2019

[1] Fragen und Anmerkungen per Mail an vadim.alekseev@tu-dresden.de oder aschulz@pks.mpg.de.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Über Kurven

In diesem Kapitel werden einige Resultate aus der klassischen Theorie der Kurven und Flächen dargestellt. Gelegentlich werden die Darstellungen sehr kompakt erscheinen, sodass wir den Leser auf die Referenz [?] verweisen, welche u.a. als grobe Vorlage für dieses Kapitel gedient hat. [?] behandelt die klassische Theorie von Kurven und Flächen recht ausgedehnt. Wir nutzen hier die Konvention, dass Abbildungen $\varphi\colon U \to V$ mit U, $V \subset \mathbb{R}^n$ als glatt vorausgesetzt werden, sofern nicht anders benannt. Wir arbeiten demnach fast immer mit Abbildungen des Typs $\varphi \in C^\infty$.

Definition 1.1. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f\colon U \to V$ heißt Diffeomophismus, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind.

Definition 1.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine (glatte) Abbildung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt (glatte) Kurve.

Ein einfaches Beispiel für eine Kurve γ nach Def. 1.2 ist

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)^T, \tag{2}$$

welche die Darstellung der Einheitskreislinie nach Def. 1.2 ist.

1. Länge $L(\gamma)$ von Kurven

Nachdem wir nun das Objekt Kurve definiert haben, widmen wir uns der ersten geometrischen Größe.

Definition 1.3. Sei $\gamma\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Durch

$$L(\gamma) := \sup_{\substack{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b \\ n\in\mathbb{N}}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \right\} \tag{3}$$

definieren wir die Länge $L(\gamma)$ einer stetigen Kurve γ. Ist $L(\gamma) < \infty$, so heißt γ rektifizierbar.

Bemerkung 1.4. Für den Fall, dass $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve ist und I (halb-)offen, definiert man $L(\gamma)$ als Supremum der Längen über abgeschlossene Teilintervalle $I' \subset I$

$$L(\gamma) := \sup_{\substack{I' \subset I \\ I' \text{Intervall, abg.}}} \{L(\gamma|_{I'})\}. \tag{4}$$

Theorem 1.5. *Sei $\gamma\colon [a,b] = I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Dann gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Bemerkung 1.6. Eigentlich reicht für dieses Theorem $\gamma \in C^1$ aus. Unserer Wahl nach ist jedoch $\gamma \in C^\infty$.

Beweis. (1) Die Summe $\sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1} - \gamma(t_i))\|$ aus der Defintion 1.3 wächst, wenn man die genutzte Partition verfeinert. (Dreicksungleichung)

(2) Es dürfen abgeschlossene Intervalle I angenommen werden, denn für halb-/offene Intervalle ist die Länge als Supremum über abgeschlossene Teilintervalle definiert.

(3) Für glatte $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ gilt mit $I = [c,d]$ die Abschätzung

$$\|\gamma(d) - \gamma(c)\| \leq (d-c) \sup_{t \in [c,d]} \|\dot{\gamma}(t)\|$$

Damit folgt nun

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1} - \gamma(t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{t \in [t_{i+1}, t_i]} \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot (t_{i+1} - t_i) \tag{6}$$

$$\leq \sup_{t \in I} \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot (b-a). \tag{7}$$

Daraus folgt dann $L(\gamma) < \infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Partition, sodass

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1} - \gamma(t_i)\| < \varepsilon. \tag{8}$$

Sei nun $\gamma(t) = (\gamma_j(t))_{j=1}^n$, wobei γ_j die glatten Komponenten von γ bezeichnen. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\tau_i^{(j)} \in [t_{i+1} - t_i]$, sodass
$\gamma_j(t_{i+1} - \gamma_j(t_i)) = \dot{\gamma}_j\left(\tau_i^{(j)}\right) \cdot (t_{i+1} - t_i)$, wobei $j \in 1, \ldots, n$. Andererseits gilt

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t = \|\dot{\gamma}(\tilde{\tau}_i)\| \cdot (t_{i+1} - t_i), \tag{9}$$

für ein gewisses $\tilde{\tau}_i$. Nun folgt zunächst

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t - \|\gamma(t_{i+1} - \gamma(t_i)\| = (t_{i+1} - t_i) \underbrace{\left(\|\dot{\gamma}(\tilde{\tau}_i)\| - \left(\sum_{j=0} n \dot{\gamma}_j(\tau_i^{(j)}) \right)^{\frac{1}{2}} \right)}_{=:(*)}. \tag{10}$$

Da γ als glatt vorausgesetzt war, ist $\dot{\gamma}$ gleichmäßig stetig auf $I = [a, b]$ und daher gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass $(*) < \varepsilon$, wenn $t_{i+1} - t_i < \delta$. Verfeinern wir nun die Zerlegung des Intervalls, sodass $\forall i : \ |t_{i+1} - t_i| < \delta$ gilt noch immer $L(\gamma) < \varepsilon$, aber auch $|(*)| < \varepsilon \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Schließlich folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t - L(\gamma) \right| &\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t - \|\gamma(t_{i+1})\| - \|\gamma(t_i)\| \right) \right. && (11)\\
&\quad + \left. \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1} - \gamma(t_i))\| - L(\gamma) \right| && (12)\\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot \varepsilon + \varepsilon && (13)\\
&= (b - a)\varepsilon + \varepsilon. && (14)
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt Gleichheit. □

Bemerkung 1.7. Die Länge einer Kurve sollte eine geometrische Größe bilden, d.h. sie sollte invariant unter der benutzten Parametrisierung sein.

2. Parametrisierungen

Definition 1.8. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $\varphi\colon I \to J$ eine glatte bijektive Abbildung mit glattem φ^{-1}. Dann ist auch $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi^{-1}$ eine glatte Kurve und wird Umparametrisierung von γ genannt.

Bemerkung 1.9. Intuitiv denkt man, dass geometrische Eigenschaften von γ und $\tilde{\gamma}$ wie z.B. die Längen gleich sein müssen, also $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$ gelten muss. Dies liegt daran, dass die selbe geometrische Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ in den Darstellungen γ und $\tilde{\gamma}$ anders durchlaufen wird.

Aus den Voraussetzungen an φ folgt, dass für das Innere von I entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ gilt. Im ersten Fall heißt φ orientierungserhaltend und im letzteren Fall nennt man

φ orientierungsumkehrend. Wir beobachten noch folgende Relation. Ist $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ und $\varphi\colon I \to J$ eine Umparametrisierung, dann ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\gamma \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(t_0\right)\right) = 0. \tag{15}$$

Definition 1.10. Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär, wenn $\dot{\gamma}(t) \neq 0\ \forall t \in I$.

Beispiel 1.11. Einige Beispiele sollen das Konzept der Regularität verdeutlichen.

(1) Sei $\gamma_1(t) = (t^3, t^6)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Hier ist $\dot{\gamma}_1(t = 0) = 0$, also diese Kurve nicht regulär. Jedoch ist die Kurve $\gamma_2(t) = (t, t^2)$ regulär. Beide beschreiben jedoch das selbe geoemtrische Objekt.
(2) Die Kurve $\gamma(t) = (t^2, t^6)$ ist nicht regulär.

Bemerkung 1.12. Aus den Beispielen ist ersichtlich, dass die Forderung nach Regularität eine echte Einschränkung darstellt, da die Menge der zugelassenen Parametrisierungen des geometrischen Objekts (Kurve) de facto verkleinert wird.

Definition 1.13. Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt Frenet-regulär, wenn die Vektoren $\gamma^{(i)}(t)$ mit $1 \leq i \leq n-1$ für alle $t \in I$ linear unabhängig sind.

Bemerkung 1.14. Der aufmerksame Leser bemerkt, dass die spezielle Form der Regularität aus Def. (1.13) für den Fall $n = 2$ mit der allgemeinen Regularität aus Def. (1.10) koinzidert.

Man kann sich nun fragen wieso in Def. (1.13) die Forderung der linearen Unabhängigkeit sich nicht bis auf $i = n$ erstreckt. Der tiefere Sinn liegt in der Orientierung, die einen weiteren Freiheitsgrad darstellt.

Proposition 1.15. *Seien $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann existiert genau eine bzgl. der Standardbasis positiv orientierte ONB $e_1, \ldots, e_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *gilt* $\operatorname{span}(e_1, \ldots, e_i) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_i)$
(ii) $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *gilt* $\langle e_i, v_i \rangle = 0$.

Beweis. Wende Gram-Schmidt-Verfahren auf $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$ und erhalte eindeutige $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ mit obigen Eigesnschaften. e_n ist durch die $e_1, \ldots, e_{n-1}$ und die Orientierungsbedingung eindeutig festgelegt. □

Bemerkung 1.16. Nach den Gleichungen im Gram-Schmidt-Verfahren hängt das System $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ glatt vom System $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$ ab.

Definition 1.17. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve. Das (begleitende) Frenet-n-Bein von γ ist die (glatte) Familie von Vektoren $e_i\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $1 \leq i \leq n$, die durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Familie $\left\{\gamma^{(i)}(t)\right\}_{i=1}^{n-1}$ für $t \in I$ folgt.

Definition 1.18. Eine Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1 \ \forall t \in I$.

Bemerkung 1.19. Im Fall von Def. (1.18) gilt für $a, b \in I$ mit $a < b$ die Gleichheit $L\left(\gamma|_{[a,b]}\right) = b - a$

Wenn $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ regulär ist, also $\|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \ \forall t \in I$, dann ist die Abbildung

$$s\colon [c,d] \to [0, L(\gamma)] \tag{16}$$

$$s(t) = \int_c^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = L\left(\gamma|_{[c,t]}\right) \tag{17}$$

eine Umparametrisierung. Dies bedeutet, dass jede reguläre Kurve eine orieentierte Umparametrisierung nach Bogenlänge besitzt. Bis auf Verschiebungen ist diese eindeutig. Wir beobachten eine wichtige Relation. Die Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist nach Bogenlänge parametrisiert genau dann, wenn $e_1(t) = \dot{\gamma}(t) \ \forall t \in I$. Ist γ nun nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt zunächst $1 = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle$. Ableitung beider Seiten gibt dann die Gleichung $0 = 2\langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = 0$, also die Orthogonalität von $\dot{\gamma}(t)$ und $\ddot{\gamma}(t)$. Für den speziellen Fall von $n = 2$ folgt die Beziehung $\ddot{\gamma}(t) = \kappa(t)e_2(t)$, wobei $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ zunächst eine reellwertige Koeffizientenfunktion ist.

Definition 1.20. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert. Dann heißt die (eindeutig bestimmte) Funktion $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\ddot{\gamma}(t) = \kappa(t)e_2(t)$ die Krümmung von γ.

Beispiel 1.21. Betrachten wir exemplarisch einen Kreis mit Radius R. Dieser sei näher bestimmt durch $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $\|\dot{\gamma}(t)\| = R$. Nach Bogenlänge parametrisiert ergeben sich die Terme

$$\gamma(s) = R\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right), \ s \in [0, 2\pi] \tag{18}$$

$$\dot{\gamma}(s) = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right) \tag{19}$$

$$\ddot{\gamma}(s) = -\frac{1}{R}\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right). \tag{20}$$

Es folgen also die Ausdrücke

$$e_1(s) = (-\sin s, \cos s) \tag{21}$$

$$e_2(s) = (-\cos s, -\sin s). \tag{22}$$

Aus diesen Gleichungen extrahiert man leicht die konstante Krümmung $\kappa = \frac{1}{R}$.

Theorem 1.22. *(Satz von Frenet, Hauptsatz der Kurventheorie) Sei* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ *eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve. Dann existieren (glatte) Funktionen* $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2}\colon I \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ *und* $\kappa_{n-1}\colon I \to \mathbb{R}$*, sodass das begleitende Frenet-n-Bein* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *folgende Differentialgleichungen erfüllt:*

$$\dot{e}_1 = \kappa_1 e_2 \tag{23}$$

$$\dot{e}_i = \kappa_i e_{i+1} - \kappa_{i-1} e_{i-1}, \ i \in \{2, \ldots, n-1\} \tag{24}$$

$$\dot{e}_n = -\kappa_{n-1} e_{n-1}. \tag{25}$$

Die $\{\kappa_i\}_{i=1}^{n-1}$ *heißen Frenet-Krümmungen von* γ*.*
Umgekehrt seien $t_0 \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$ *gegeben, sowie eine positiv orientierte ONB* $\left\{e_i^{(0)}\right\}_{i=1}^n$ *in* $\mathbb{R}^n$ *und glatte Funktionen* $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2}\colon [t_0, d] \to (0, \infty)$ *und* $\kappa_{n-1}\colon [t_0, d] \to \mathbb{R}$ *gegeben. Dann existiert genau eine Frenet-n-Kurve* $\gamma\colon [t_0, d] \to \mathbb{R}^n$ *mit Krümmungen* κ_1, κ_{n-1}*,* $\gamma(t_0) = p, \ e_i(t_0) = e_i^{(0)} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$*.*

Beweis. Widmen wir uns zuerst der Existenz der κ_i. Nach Konstruktion des Frenet-n-Beins gilt für alle $t \in I$, dass $\operatorname{span}(e_1(t), \ldots, e_i(t)) = \operatorname{span}(\dot{\gamma}^{(1)}, \ldots, \dot{\gamma}^{(n-1)})$. Insbesondere folgt $e_i(t) = \sum_{j=1}^i a_{ji} \gamma^{(j)(t)}$. Damit dann

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{i} \left(\dot{a}_{ji}(t) \gamma^{(j)}(t) + a_{ji}(t) \gamma^{(j+1)}(t) \right) \tag{26}$$

$$\in \operatorname{span}\left\{ \dot{\gamma}^{(1)}(t), \ldots, \dot{\gamma}^{(i+1)} \right\} \tag{27}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ e_1(t), \ldots, e_{i+1}(t) \right\}. \tag{28}$$

Also gilt $\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{i+1} \langle \dot{e}_i(t), e_j(t) \rangle \, e_j(t)$ und damit $\langle \dot{e}_i, e_j \rangle = 0$ für $j \geq i+2$. Jedoch bilden die $e_i(t)$ eine ONB mit $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$. Daraus folgt nun

$$2 \langle \dot{e}_i, e_i \rangle = 0 \tag{29}$$

$$\langle \dot{e}_i, e_j \rangle = - \langle e_i, \dot{e}_j \rangle, \ (j \neq i). \tag{30}$$

Insbesondere gilt $\langle e_i, \dot{e}_j \rangle = 0$ für $j \geq i+2$. Dies bedeutet, dass $\langle \dot{e}_i, e_i \rangle \neq 0$ nur, wenn $j = i+1$. Dait also

$$\dot{e}_i = \kappa_i e_{i+1} + \lambda_i e_{i-1} \tag{31}$$

$$\kappa_i = \langle \dot{e}_i, e_{i+1} \rangle = - \langle e_i, \dot{e}_{i+1} \rangle = -\lambda_{i+1}. \tag{32}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass die κ_i nicht negativ sind. Nach dem GSV gilt $\left\langle \gamma^{(i+1)}(t), e_{i+1}(t) \right\rangle > 0$.

$$\dot{e}_i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{ji}(t)\gamma^{(j)} \right) \tag{33}$$

$$= \sum_{j=1}^{i} \left(\dot{a}_{ji}\gamma^{(j)}(t) + a_{ji}(t)\gamma^{(j+1)}(t) \right). \tag{34}$$

Die Abbildung $a_{ii}(t) \to$ Diagonaleintrag in der Basiswechselmatrix von $\left(\dot{\gamma}^{(1)}(t), \dots, \dot{\gamma}^{(n-1)}(t)\right)$ zu $(e_1(t), \dots, e_{n-1}(t))$ sieht so aus

$$M(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad b_{ii}(t) > 0. \tag{35}$$

Nun ist $\left\langle \gamma^{(i)}(t), e_i(t) \right\rangle$ genau der Diagonaleintrag der inversen Matrix. Diese sind auch positiv nach Eigenschaften der oberen Dreiecksmatrizen. Also gilt $\langle \dot{e}_i(t), e_{i+1}(t) \rangle = a_{ii}(t) \left\langle e_{i+1}(t), \gamma^{(i+1)}(t) \right\rangle > 0$.
Die Eindeutigkeit der Kurve für geg. $\gamma(t_0), e_i(t_0), \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ folgt aus dem Satz v. Picard-Lindelöf, wenn man die Funktion $\gamma(t) := p_0 + \int_a^t e_1(\tau)\mathrm{d}\tau$ auf $I = [a, b]$ betrachtet. γ ist nach Konstruktion nach Bogenlänge parametrisiert mit $\dot{\gamma}(t) = e_1(t), \ddot{\gamma}(t) = \kappa_1(t)e_2(t), \dots$. Damit ist $\operatorname{span}\left\{\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)\right\} = \operatorname{span}\{e_1(t), \dots, e_i(t)\}$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$. D.h. das System $\{e_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ entsteht durch GSV aus dem System $\left\{\gamma^{(i)}(t)\right\}_{i=1}^{n-1}$ und $e_n(t)$ erfüllt die Bedingung an die positive Orientierung von $\{e_i(t)\}_{i=1}^{n}$, da $e_n(t_0) = e_n^{(0)}$ durch Orientierung gewählt war. Damit ist $\{e_i(t)\}_{i=1}^{n}$ das begleitende Frenet-n-Bein zu γ. $\square$

3. Kurven in der Ebene

Sei $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Frenet-Kurve im Fall $n = 2$, die nach Bogenlänge parametrisiert ist und bezeichnen e_1, e_2 die Frenet-2-Basis. Aus der Frenet-Gleichung wissen wie, dass $\dot{e}_1 = \kappa e_e$ gilt. Sei nun $t_0 \in I$. Wir interessieren uns für eine geometrische Interpretation von $\kappa(t_0)$. Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, ist $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ und damit $\dot{\gamma}(t) = e_1(t)$ und $\ddot{\gamma}(t) = e_2(t)$.

Proposition 1.23. *Sei γ wie vorig beschrieben mit $\gamma(t_0) \neq 0$. Der Kreis mit Mittelpunkt $\gamma(t_0) + \frac{e_2(t_0)}{\kappa(t_0)}$ und Radius $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ ist eindeutig bestimmt und approximiert die Kurve γ im Punkt $\gamma(t_0)$ bis zur zweiten Ordnung.*

Beweis. Folgt leicht aus Taylorentwicklung. □

Definition 1.24. Der eben benannte Kreis wird Schmiegkreis von γ and $\gamma(t_0)$ genannt. $R(t_0) := \frac{1}{\kappa(t_0)}$ heißt Krümmungsradius.

Man stelle sich nun vor, dass man sich mit der Einheitsgeschwindigkeit auf einem Kreis bewegt. Die Krümmung eines Kreises ist konstant $\frac{1}{r}$ und entspricht in dem Fall auch der Winkelgeschwindigkeit des Tangentialvektors, denn auf der Länge $2\pi r$ dreht sich der Tangentialvektor gerade um 2π. Dieser Gedankengang gilt auch im allgemein Fall. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre glatte nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Sei nun $t_0 \in I$. Dann ist $\dot\gamma(t_0) = e_1(t_0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Wegen $\|\dot\gamma(t_0)\| = 1$ existiert $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ mit $\dot\gamma(t_0) = \exp(i\alpha_0)$.

Definition 1.25. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha\colon I &\to \mathbb{R} && (36)\\ t &\mapsto \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} \kappa(\tau)\mathrm{d}\tau && (37) \end{aligned}$$

heißt Winkel von γ.

Lemma 1.26. $\forall t \in I : \ \dot\gamma(t) = \exp(i\alpha(t))$

Beweis. Wir wissen, dass $\dot\gamma(t_0) = \exp(i\alpha(t_0))$. Es ist ausreichend zu zeigen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot\gamma(t)}{\exp(i\alpha(t))}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot\gamma(t)}{\exp(i\alpha(t))}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{e_1(t)}{\exp(i\alpha(t))}\right) && (38)\\ &= \frac{\dot e_1 \exp(i\alpha(t)) - i\dot\alpha(t)\exp(i\alpha(t))\, e_1(t)}{(\exp(i\alpha(t)))^2} && (39)\\ &= \frac{\kappa(t)e_2(t) - \kappa(t)e_2(t)}{\exp(i\alpha(t))} && (40)\\ &= 0. && (41) \end{aligned}$$

□

Definition 1.27. Eine Kurve $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma^{(j)}(a) = \gamma^{(j)}(b)$ für $j \in \mathbb{N}$ heißt geschlossene Kurve.

Definition 1.28. Die Umlaufzahl einer geschlossenen nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$n_\gamma := \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{42}$$

Für eine kleine geometrische Interpretation siehe Windungszahl in der Wikipedia. Wir beobachten, dass für jede geschlossene Kurve $n_\gamma \in \mathbb{Z}$. Das ist leicht zu sehen, denn, wenn $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ geschlossen ist, dann gilt nach obigem Lemma
$\dot\gamma(a) = \exp(i\alpha(a)) = \exp(i\alpha(b)) = \dot\gamma(b)$ und damit generisch $\alpha(b) - \alpha(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Gleichzeitig ist jedoch $\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b \kappa(t)\mathrm{d}t = 2\pi n_\gamma$ und somit $n_\gamma \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.29. Eine geschlossene Kuve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt einfach geschlossen, wenn

$$\gamma(t) = \gamma(t') \ \forall t, t' \in (a,b) \tag{43}$$

$$\gamma(t) \neq \gamma(a) \ \forall t \in (a,b). \tag{44}$$

Theorem 1.30. *Die Umlaufzahl einer einfach geschlossenen Kurve ist* ± 1.

Beweis. **Wird später ergänzt** □

4. Isoperimetrische Ungleichung

Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\partial\Omega = \gamma(I)$. Unterdiesen Bedingungen gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$A(\Omega) := \int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \frac{1}{4\pi}L(\gamma)^2. \tag{45}$$

Beweis. Wir benutzen die Stokes-Formel. Wenn $n_\gamma = 1$, dann gilt $\int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_I = x(t)\dot y(t)\mathrm{d}t$. Wir können annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist und $n_\gamma = 1$. Setze nun

$$x_+ := \max_{s\in I} x(s) \tag{46}$$

$$x_- := \min_{s\in I} x(s) \tag{47}$$

$$x_0 := \frac{x_+ + x_-}{2}. \tag{48}$$

Wir können γ in $\mathbb{R}^2$ so umparamtrisieren und verschieben, sodass $x_0 = 0, I = [0, L(\gamma)]$ und $\exists s_- \in (0, L(\gamma))$ mit $x(s_-) = x_-$. Setze $r := x_+ - x_0 = x_0 - x_-$. Wir parametrisieren den Kreis vom Radius r wie folgt:

$$\alpha(t) := (\bar{x}(t), \bar{y}(t))^T \tag{49}$$

$$\bar{x}(t) := x(t) \tag{50}$$

$$\bar{y}(t) := \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x(t)^2} & , t \in [0, s_-] \\ -\sqrt{r^2 - x(t)^2} & , t \in [s_-, L(\gamma)]. \end{cases} \tag{51}$$

$\alpha(t)$ st eine stetig diffbare Kurve, aber nicht unbedingt regulär. Dennoch gilt $\int_0^{L(\gamma)} \bar{x}(t)\dot{\bar{y}}(t)\mathrm{d}t = \pi r^2$. Analog $\pi r^2 = -\int_0^{L(\gamma)} \dot{\bar{x}}(t)\bar{y}(t)\mathrm{d}t$. Es folgt

$$A(\Omega) + \pi r^2 = \int_0^{L(\gamma)} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{\bar{x}}(t)\bar{y}(t))\,\mathrm{d}t \tag{52}$$

$$= \int_0^{L(\gamma)} \left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{\bar{x}}(t) \end{pmatrix} \right\rangle \tag{53}$$

$$\leq \int_0^{L(\gamma)} \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\|}_{=r} \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{pmatrix} \right\|}_{=1} \mathrm{d}t \tag{54}$$

$$= L(\gamma)r \tag{55}$$

Daraus folgt nun

$$\sqrt{A(\Omega)\pi r^2} \leq \frac{A(\Omega) + \pi r^2}{2} \leq \frac{L(\gamma)r}{2} \tag{56}$$

und damit die Behauptung $A(\Omega) \leq \frac{L(\gamma)^2 r^2}{4\pi r^2} = \frac{L(\gamma)^2}{4\pi}$. □

5. Satz von Green/Stokes

Theorem 1.31. *Sei γ eine einfach geschlossene stückweise stetige Kurve, welche das beschränkte Gebiet Ω derart berandet, sodass das Frenet-2-Bein von γ positiv orientiert ist. Seien weiterhin p, $q\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ glatte Abbildungen. Dann gilt*

$$\int_\gamma p(x,y)\mathrm{d}x + q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\Omega \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{57}$$

Beweis. **Wird später ergänzt.** □

KAPITEL 2

Über Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $p \in M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) (lokale Darstellung durch eine Karte) Es gibt eine offene Umgebung $\widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ von p, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine glatte Funktion $\psi\colon V \to \widehat{U}$, so dass:
   (a) $\psi\colon V \to M \cap \widehat{U}$ ist ein Homöomorphismus.
   (b) $D_{\psi^{-1}(p)}\psi$ ist injektiv.

(2) (lokale Darstellung durch eine Untermannigfaltigkeitskarte) Es existiert eine offene Umgebung $\widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ von p, eine offene Teilmenge $\widehat{V} \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\Psi\colon \widehat{V} \to \widehat{U}$, sodass $M \cap \widehat{U} = \Psi\left(\widehat{V} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})\right)$.

(3) (lokale Darstellung als Nullmenge) Es existiert eine offene Umgebung $\widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine glatte Funktion $F\colon \widehat{U} \to \mathbb{R}^{n-m}$, sodass
   (a) $F|_{M\cap\widehat{U}} = 0$
   (b) $D_pF \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$ ist surjektiv.

(4) (lokale Darstellung als Graph) Es gibt nach eventueller Permutation der Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung $\widehat{V}$ von $\bar{p} := \pi_{\mathbb{R}^m}(p)$, eine offene Umgebung $V' \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von $\tilde{p} := \pi_{\mathbb{R}^{n-m}}(p)$ und eine glatte Funktion $f\colon V \to V'$ mit

$$M \cap (V \times V') = \{(x, f(x)) \mid x \in V\}.$$

Hierbei sind $\pi_{\mathbb{R}^n}$ bzw. $\pi_{\mathbb{R}^{n-m}}$ die Projektionen von $\mathbb{R}^n$ auf die ersten bzw. letzten Koordinaten.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, die die obigen äquivalenten Bedingungen für alle $p \in M$ erfüllt, heißt Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Ein simples Beispiel stellt die Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. in der Umgebung des Punktes $(0, \dots, 0, 1)$ gilt, dass $U \cap S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_n = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \right\}$.
Nun zum Beweis der Äquivalenz der Bedingungen in (2.1).

Beweis. (1)⇒(2): Sei $\{v_i\}_{i=1}^m$ eine Basis des Bildes von $D_{\psi^{-1}(p)}\psi$. Ergänze diese zu einer Basis $\{v_i\}_{i=1}^n$ des $\mathbb{R}^n$. Definiere die Abbildung Ψ durch

$$\Psi\colon V \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n \tag{58}$$

$$(x', x'') \mapsto \psi(x') + \sum_{i=0}^{n-m} x''_i v_{m+i}. \tag{59}$$

$D_{(\psi^{-1}(p),0)} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ hat $v_1, \ldots, v_n$ als Spalten und ist damit invertierbar. Damit existiert eine offene Umgebung $\widehat{V}$ von $(\psi^{-1}(p), 0)$, sodass $\Psi|_{\widehat{V}}$ Diffeomorphismus ist.
(2)⇒(3): Definiere $F := \pi_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ \Psi^{-1} = \{(x', f(x')) \mid x' \in V'\}$. Dann ist
$DF = D\pi_{\mathbb{R}^{n-m}} \circ D\Psi^{-1}$ an der Stelle a surjektiv und $F|_{M\cap\widehat{U}} = 0$.
(3)⇒(4): Folgt sofort aus dem Satz über die implizite Funktiion.
(4)⇒(1): Definiere $\psi(x) := (x, f(x))$, $\widehat{U} := V \times V'$. Die Eigenschaften folgen direkt. □

Definition 2.2. Die Abbildung $\psi\colon V \to U := \widehat{U} \cap M$ aus der Def. (2.1) heißt Karte (um $p \in M$). Die Abbildung $\Psi\colon \widehat{V} \to U$ heißt Untermannigfaltigkeitskarte (um $p \in M$).

Betrachten wir als Beispiel die Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$. Die Funktion $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ hat das Differential $DF = (2x_1, 2x_2, 2x_3) \neq 0$ auf S^2. Damit bildet S^2 eine UM des $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung

$$\psi\colon (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3 \tag{60}$$

$$(\phi, \theta) \mapsto (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \sin\theta) \tag{61}$$

ist eine Karte. Die Abbildung

$$\phi\colon B(0,1) \to S^3 \subset \mathbb{R}^3 \tag{62}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 1 - x_1^2 + x_2^2) \tag{63}$$

ist auch eine Karte, jedoch nur für die obere Halbsphäre. In der DG studiert man Größen, die man zwar mit Hilfe von Karten definiert, aber diese unabhängig von der Wahl der Karte sein sollen. Die nachfolgenden Diagramme sollen die Situationen der einzelnen Karten miteinander vergleichen.

$$\begin{array}{ccccc}
V^\Psi & \xrightarrow{\Psi} & U^\Psi & \subset & \mathbb{R}^n \\
\cup| & & \cup| & & \cup| \\
V^\psi & \xrightarrow{\psi} & U^\psi & \subset & M
\end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \supset V^\Phi &\xrightarrow{\ \Phi\ } U^\Phi \cap U^\Psi \xleftarrow{\ \Psi\ } V^\Psi \subset \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \times \{0\} \supset V^\phi &\xrightarrow{\ \phi\ } U^\phi \cap U^\psi \xleftarrow{\ \psi\ } V^\psi \subset \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

An den Stellen, wo sich Kartenumgebungen U^Ψ, U^Φ schneiden, sind Kartenwechselabbildungen wohldefiniert, also Abbildungen $\Psi^{-1} \circ \Phi \colon V^\Phi \to V^\Psi$ und $\psi^{-1} \circ \phi \colon V^\phi \to V^\psi$. Da die Karten selbst Diffeomorphismen sind, überträgt sich diese Eigenschaft auch auf die Kartenwechselabbildungen.

1. Tangentialraum

Definition 2.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\psi \colon V \to U$ eine Karte um p. Der Tangentialraum zu M an p ist definiert als

$$T_pM := \operatorname{Im} D_{\psi^{-1}(p)}\psi \subset \mathbb{R}^n$$

Man muss nun überprüfen, dass T_pM wohldefiniert ist, d.h., dass er von der Wahl der Karte ψ nicht abhängt. Ist $\phi \colon V^\phi \to U^\phi$ eine andere Karte und $p \in U^\phi \cap U^\psi$, dann ergibt sich zunächst das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "D_{\psi^{-1}(p)}\psi"] \arrow[rr, "D_{\psi^{-1}(p)}\left(\phi^{-1}\circ\psi\right)"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "D_{\phi^{-1}(p)}\phi"'] \end{tikzcd}$$

Nun ist $\phi^{-1} \circ \psi$ ein Diffeomorphismus und es folgt, dass
$\operatorname{im} D_{\psi^{-1}(p)}\psi = \operatorname{im} D_{\psi^{-1}(p)}\left(\phi \circ \phi^{-1} \circ \psi\right) = \operatorname{im} D_{\phi^{-1}(p)}\phi$.

Definition 2.4. Das Tangentialbündel von M wird definiert als
$TM := \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M, v \in T_pM\}$.

Definition 2.5. Die Koordinaten eines Tangentialvektors v bzgl. einer Karte ψ sind durch $v^\psi := D_p\psi^{-1}(v)$ gegeben.

Eine Basis des Tangentialraums kann man nach Definition aus dem Bild einer Basis des $\mathbb{R}^n$ erhalten. Ist ψ eine Karte und $\{e_i\}_{i=1}^n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, und $\psi(x) = p$, so bildet

$$D_x\psi(e_i) = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, m$$

eine Basis von T_pM.

Die Tangentialvektoren $v \in T_pM$ können wir auch als Richtungsableitungen auffassen. Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann ist $\partial_v f := v(f) := D_pf(v)$. Ist $v \in T_pM$, so hängt $v(f)$ nur von $f|_M$ ab, denn

$$
\begin{aligned}
v(f) &= D_pf(v) && (64)\\
&= D_p\left(f \circ \Psi \circ \Psi^{-1}\right)(v) && (65)\\
&= D_x\left(f \circ \Psi\right) \circ \underbrace{D_p\Psi^{-1}(v)}_{\in \mathbb{R}^m \times \{0\}} && (66)\\
&= D_x\left(f \circ \psi\right)(v) && (67)
\end{aligned}
$$

Aus den Ableitungsregeln folgt auch die Leibnizregel mit $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ für $v \in T_pM$ und $f,\, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Ist nun $\gamma\colon I \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\gamma(0) = p$, dann gilt $\dot\gamma(0) \in T_pM$. Das ist unmittelbar einleuchtend, denn

$$
\begin{aligned}
\dot\gamma(0) &= D_0\gamma && (68)\\
&= D_0\left(\psi \circ \psi^{-1} \circ \gamma\right) && (69)\\
&= D_x\psi \circ D_0\left(\psi^{-1} \circ \gamma\right) && (70)\\
&\in \operatorname{im} D_x\psi && (71)\\
&= T_pM. && (72)
\end{aligned}
$$

Somit können wir den Tangentialraum nun aus mehreren Sichtweisen betrachten:

(1) Bild des Differentials $D_x\psi$ einer Parametriserung von M
(2) Die Menge der Richtungsableitungen $v \in T_pM$ für glatte Funktionen auf M an p
(3) Menge der Tangentialvektoren glatter Kurven auf M durch p

Aus der Äquivalenz der Varianten (1) und (2) der Definition einer Untermannigfaltigkeit folgt, dass für eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ und eine Karte $\psi\colon V \to U$ die Verknüpfung $f \circ \psi\colon V \to \mathbb{R}$ genau dann glatt ist, wenn f die Einschränkung einer glatten Funktion von der offenen Teilmenge $\widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ auf M ist. Somit können wir glatte Funktionen auf M auch so definieren:

Definition 2.6. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist glatt, wenn für jede Karte ψ die Funktion $f \circ \psi\colon V \to \mathbb{R}$ glatt ist. Die Algebra der glatten Funktionen auf M wird durch $C^\infty(M)$ bezeichnet.

Nach obigen Überlegungen können wir diese Funktionen in Richtung jedes Tangentialvektors $v \in T_pM$ ableiten, und es gilt

$$[D_x\psi(e_i)](f) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x_i}(x),$$

also entsprechen die Vektoren $D\psi(e_i)$ genau den Richtungsableitungen in Richtung x_i. Dies motiviert auch die Notation

$$D_x\psi(e_i) =: \frac{\partial}{\partial x_i}$$

für die entsprechende Basis des Tangentialraumes.

Definition 2.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine UM. Die von $\mathbb{R}^n$ induzierte Riemannsche Metrik auf M ist die Familie von Skalarprodukten g_p definiert durch

$$\begin{aligned} g_p\colon T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} && (73)\\ (v,w) &\mapsto \langle v,w\rangle_{\mathbb{R}^n} =: g_p(v,w). && (74) \end{aligned}$$

Sei $\psi\colon V^\psi \to U^\psi \subset M$ eine Karte. Wir drücken nun g_p in Koordinaten aus. Setze hierfür $x := \psi^{-1}(p)$. Dann ergibt sich die Darstellung $g_x^\psi(\cdot,\cdot) = g_p\left(D_x\psi(\cdot), D_x\psi(\cdot)\right)$ von g bzgl. ψ. Explizit ergibt sich

$$\begin{aligned} g_x^\psi(v,w) &= g_p\left(D_x\psi(v), D_x\psi(w)\right) && (75)\\ &= \langle D_x\psi(v), D_x\psi(w)\rangle && (76)\\ &= v^T \underbrace{\left(D_x\psi\right)^T \left(D_x\psi\right)}_{=:G_x} w. && (77) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Matrix G_x die Matrix des Skalarproduktes g_x^ψ ist und damit die Riemannsche Metrik auf M in lokalen Koordinaten darstellt.

Es sei als Beispiel $M = S^2$ gewählt und die Parametrisierung
$\psi(\theta, \phi) = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$ für $\phi \in (0, 2\pi)$ und $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann ist

$$D_{(\theta,\phi)}\psi = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{78}$$

und damit

$$G = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|e_\phi\|^2 & \langle e_\phi, e_\theta\rangle \\ \langle e_\theta, e_\phi\rangle & \|e_\theta\|^2 \end{pmatrix}, \tag{79}$$

wobei $e_\phi := D_\psi(e_1)$ und $e_\theta = D_\psi(e_2)$. Sei $\gamma \colon I \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Mit $\gamma(I) \subset U^\psi$ finden wir

$$L(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma\| \,\mathrm{d}t \tag{80}$$

$$= \int_I \langle\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}^{\frac{1}{2}} \tag{81}$$

$$= \int_I g_{\gamma(x)}\left(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\right) \mathrm{d}t \tag{82}$$

$$= \int_I g^\psi_{\psi^{-1}(\gamma(t)}\left(D_{\psi^{-1}}\dot\gamma(t), D_{\psi^{-1}}\dot\gamma(t)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \tag{83}$$

$$= \int_I \left(\dot{\tilde\gamma}(t)^T G_x \dot{\tilde\gamma}(t)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t, \tag{84}$$

wobei $\psi^{-1} \circ \gamma =: \tilde\gamma$ und $G_x := (D_x\psi)^T\,(D_x\psi)$

2. Vektorfelder auf M

Definition 2.8. Sei $X \colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung derart, dass für jede Karte $\psi \colon V^\psi \to U^\psi$ die Abbildung $X \circ \psi \colon V^\psi \to \mathbb{R}^n$ glatt ist. X wird Vektorfeld auf $M \subset \mathbb{R}^n$ genannt. Ein Tangentialvektorfeld (TVF) X ist ein Vektorfeld (VF) auf M mit $X(p) = X_p \in T_pM$ für alle $p \in M$. Ein Normalenvektorfeld (NVF) X ist ein VF auf M mit $X(p) = X_p \perp T_pM$ für alle $p \in M$. Ein Einheitsvektorfeld (EVF) X ist ein VF mit $\langle X(p), X(p)\rangle = 1$ für alle $p \in M$

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Sei $\psi\colon V^\psi \to U^\psi \subset M \subset \mathbb{R}^3$ eine Karte von M. Sei $p \in U^\psi$, $v_i := \left(D_{\psi^{-1}(p)}\psi\right)(e_i)$ mit $i \in \{1,2\}$ die von ψ induzierte Basis von T_pM. Dann ist

$$\nu_p := \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} \perp T_pM \tag{85}$$

ein NVF zu M an p. Die Abbildung $\nu\colon U^\psi \to \mathbb{R}^n,\ p \mapsto \nu_p$ ist ein NVF auf U^ψ. Für jede andere Parametrisierung $\phi\colon V^\phi \to U^\phi = U^\psi$ gilt $\nu_p^\phi = \pm\nu_p^\psi$ für jedes $p \in U^\phi = U^\psi$.

Definition 2.9. Eine orientierte Fläche (M,ν) ist eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ ausgestattet mit einem Einheitsnormalenfeld $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$.

Da $\|\nu_\phi\| = 1$ folgt, dass $\nu\colon M \to S^2$. ν heißt Gauß-Abbildung von M. Beispiele für orientierte Flächen sind u.a. die Sphäre in $\mathbb{R}^3$ und das Möbiusband.
Sei nun $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$ ein Einheitsnormalenfeld, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Leiten wir die Relation $1 = \langle \nu_p, \nu_p\rangle$ in Richtung von v an p ab, so erhalten wir

$$0 = v\left(\langle \nu,\nu\rangle\right) \tag{86}$$
$$= \langle v(\nu),\nu\rangle + \langle \nu, v(\nu)\rangle \tag{87}$$
$$= 2\left\langle v(\nu), v(\nu)\right\rangle \tag{88}$$

also $v(\nu) \perp \nu_p$ und damit $v(\nu) \in T_pM$. Insgesamt erhalten wir somit eine Abbildung $S_p\colon T_pM \to T_pM,\ v \mapsto -v(\nu)$.

Definition 2.10. Der lineare Operator S_p heißt Formoperator oder Weingartenoperator von M an $p \in M$.

Definition 2.11. Die bilineare Abbildung

$$h_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}^n \tag{89}$$
$$(v,w) \mapsto \langle S_p(v), w\rangle_{\mathbb{R}^n} = g_p\left(S_p(v), w\right) \tag{90}$$

heißt zweite Fundamentalform von M an p.

Historisch bedingt wird g_p erste Fundamentalform genannt. Es seien hier zwei Beispiele angeführt. Im ersten sei $M = \mathbb{R}^2$, damit ν konstant und daher $S_p = 0 = h_p$. Im zweiten Beispiel sei $M = S^2$ und $\nu(p) = p$. Damit folgt $D\nu = I$ und daher $S_p = -I_{T_pS^2} = h_p$.

Proposition 2.12. *Sei (M,ν) eine orientierte Fläche und $\psi\colon V^\psi \to U^\psi \subset M$ eine Karte von M, sowie $p \in M, x \in V^\psi$ mit $\psi(x) = p$. Dann gilt für alle $v,\ w \in \mathbb{R}^2$:*

$$\langle D_x\psi(v), S_p\left(D_x\psi(w)\right)\rangle = \langle \mathrm{Hess}_x\psi(v,w), \nu_p\rangle\,, \tag{91}$$

also $D_x\psi \cong T_pM$.

Beweis. $\forall x \in V^\psi$ gilt $\langle D_x\psi(v), \nu \circ \psi(x)\rangle = 0$. Ableitung nach x liefert nun

$$\underbrace{\left\langle D_x\left(D_{(\cdot)}\psi(v)\right)(w), \nu_{\psi(x)}\right\rangle}_{\left\langle \mathrm{Hess}_x\psi(v,w),\nu_{\psi(x)}\right\rangle} + \underbrace{\left\langle D_x\psi(v), D_{\psi(x)}\nu \circ D_x\psi(w)\right\rangle}_{-S_{\psi(x)}(D_x\psi(w))} = 0 \tag{92}$$

□

Diese Formel kann in Koordinaten wie folgt interpetiert werden. Die zweite Fundamentalform h_p liefert eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, nämlich hier $h_x^\psi(v,w) := h_{\psi(x)}\left(D_x\psi(v), D_x\psi(w)\right)$. Die obige Gleichung besagt, dass die Matrix von h_x^ψ duch $\left(\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial x_i \partial x_j}, \nu_{\psi(x)}\right\rangle\right)_{ij}$ gegeben ist.

Korollar 2.13. *$S_p\colon T_pM \to T_pM$ ist bzgl. dem Skalarprodukt g_p selbstadjungiert.*

Beweis. Für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ ist $\mathrm{Hess}_x\psi(v,w) = \mathrm{Hess}_x\psi(w,v)$. □

Als Beispiel sei eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ lokal an $0 \in \mathbb{R}^3$ durch $z = f(x,y)$ gegeben und derart, dass $M = \mathbb{R}^2$. Die Taylorentwicklung von f an 0 sei

$$f(x,y) = 0 + 0x + 0y + \frac{1}{2}\left(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right) + \mathcal{O}(x_ix_jx_k). \tag{93}$$

Dann hat die zweite Fundamentalform in Koordinaten die Gestalt $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

Es seien nun (T_pM, g_p) und $S_p\colon T_pM \to T_pM$ gegeben. S_p besitzt eine ONB (v_1, v_2) aus Eigenvektoren, also existieren $\kappa_1\kappa_2 \in \mathbb{R}$ mit $S_p(v_i) = \kappa_iv_i$, mit $i \in \{1,2\}$.

Definition 2.14. Die obigen κ_i heißen Hauptkrümmungen von M an p für die obigen Hauptkrümmungsrichtungen $v_i \in T_pM$ mit $i \in \{1,2\}$. Die Zahlen

$$\kappa(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S_p) \tag{94}$$

$$K(p) := \kappa_1\kappa_2 = \det(S_p) \tag{95}$$

heißen mittlere Krümmung und Gaußkrümmung von M an p.

Definition 2.15. Wir nennen p

(i) elliptischen Punkt, wenn $K(p) > 0$.
(ii) hyperbolischen Punkt, wenn $K(p) < 0$.
(iii) parabolischen Punkt, wenn ein $\kappa_i = 0$.

Theorem 2.16. *Sei $\gamma\colon I \to M \subset \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parameterisierte Kurve. Dann existiert eine Funktion $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ mit*

$$\ddot{\gamma} = \underbrace{\kappa(t)\left(\nu_{\gamma(t)} \times \dot{\gamma}(t)\right)}_{\in T_{\gamma(t)}M} + \underbrace{h_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right)\nu_{\gamma(t)}}_{\in N_{\gamma(t)}M}. \tag{96}$$

Definition 2.17. $\kappa(t)$ heißt geodätische Krümmung von γ. Wenn κ verschwindet, wird γ Geodäte oder geodätische Linie genannt.

Beweis. Wir wählen eine positiv orientierte ONB wie folgt

$$e_1(t) := \dot{\gamma}(t) \tag{97}$$

$$e_2(t) := \nu_{\gamma(t)} \times \dot{\gamma}(t) \tag{98}$$

$$e_3(t) := \nu_{\gamma(t)} \tag{99}$$

Wir drücken nun $\ddot{\gamma}(t)$ durch $e_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ aus:

$$\langle \ddot{\gamma}(t), e_1(t) \rangle = \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \|\dot{\gamma}\|^2 = 0 \tag{100}$$

Definiere jetzt $\kappa(t)$ durch $\kappa(t) := \langle \ddot{\gamma}(t), e_2(t) \rangle\, e_2(t)$. Dann gilt, dass der Tangentialanteil von $\ddot{\gamma}(t)$ genau $\gamma(t)e_2(t) = \kappa(t)\left(\nu_{\gamma(t)} \times \dot{\gamma}(t)\right)$ ist. Wir berechnen den Normalteil:

$$\langle \ddot{\gamma}(t), e_3(t) \rangle = \left\langle \ddot{\gamma}(t), \nu_{\gamma(t)} \right\rangle \tag{101}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left\langle \dot{\gamma}(t), \nu_{\gamma(t)} \right\rangle - \left\langle \dot{\gamma}(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\nu_{\gamma(t)} \right\rangle \tag{102}$$

$$= -\left\langle \dot{\gamma}(t), D_{\gamma(t)}\nu\dot{\gamma}(t) \right\rangle \tag{103}$$

$$= h_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right) \tag{104}$$

$\square$

Damit ergibt sich die Frenet-Krümmung κ_2 von $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ zu
$\kappa_2(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\kappa^2(t) + h_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\right)^2}$.
Bislang haben wir folgende Objekte im Zusammenhang mit UM $M \subset \mathbb{R}^n$ kennengelernt:

- Tangentialraum T_pM für $p \in M$
- Von $\mathbb{R}^n$ induzierte Riemannsche Metrik $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$
- Für eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ den Formoperator $S_p\colon T_pM \to T_pM$ und zweite Fundamentalform $h\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$
- Für eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ Hauptkrümmungen $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ und Gaußkrümmung $\kappa(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$

Definition 2.18. Eine Größe der inneren Geoemtrie einer UM $M \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Größe, die nur von der Riemannschen Metrik g_p abhängt. Andere Größen heißen Größen der äußeren Geometrie.

Theorem 2.19. *Die Gaußkrümmung $\kappa(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$ ist eine Größe der inneren Geometrie.*

3. Tangentialvektorfelder

Es sei daran erinnert, dass ein TVF auf einer UM $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Abbildung $X\colon M \to \mathbb{R}^n$ ist, sodass $X(p) = X_p \in T_pM$. TV können Funktionen ableiten. Für $f\colon M \to \mathbb{R}$ bekommen wir also $X(f)\colon M \to \mathbb{R},\ p \mapsto X_p(f)$. Beispielhaft sei $M = \mathbb{R}^n,\ X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $X_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i(p)\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\partial_{X(p)}(f)=X_p(t)} \quad . \tag{105}$$

Wenn $\psi\colon V^\psi \to U^\psi \subset M$ eine Kurve ist, $X\colon U^\psi \to \mathbb{R}^n$ ein TVF, dann ist $(X \circ \psi)\colon V^\psi \to \mathbb{R}^n$ und $\forall x \in V^\psi$ gilt $(X \circ \psi)(x) \in T_{\psi(x)}M$. In $T_{\psi(x)}$ gibt es eine Basis $\frac{\partial}{\partial x_i} := \partial_i^\psi := D_x\psi(e_i)$. Also hat man $(X \circ \psi)(x) = \sum_{i=1}^n X_i^\psi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Die Ableitung erfüllt die Leibnizregel, also folgt $X_p(fg) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g)$ und $X(fg) = fX(g) + gX(f)$.

Definition 2.20. Seien $X, Y\colon M \to \mathbb{R}^n$ zwei TVF. Dann heißt das TVF $[X, Y] := X_p(Y) - Y_p(X)$ Lie-Klammer oder Kommutator von X, Y.

Nach obigen Überlegungen reicht es den Kommutator für VF auf $\mathbb{R}^n$ auszurechnen, denn lokal sieht jedes VF so aus. Seien $X, Y\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ VF, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(106)\qquad [X,Y]_p(f) &= (X_p(Y))(f) - (Y_p(X))(f) \\
(107)\qquad &= \sum_{i=1}^m X_i(p)\frac{\partial Y}{\partial X_i}(f) - \sum_{i=1}^m Y_i(p)\frac{\partial X}{\partial Y_i}(f) \\
(108)\qquad &= \sum_{i,j=1}^m \left(X_i(p)\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - Y_i(p)\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
(109)\qquad &= \sum_{i,j=1}^m \left(X_i(p)\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + X_i(p)Y_j(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right. \\
(110)\qquad &- \left. Y_i(p)\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - X_i(p)Y_j(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\
(111)\qquad &= \sum_{i,j=1}^m \left(X_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(Y_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - Y_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right) \\
(112)\qquad &= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).
\end{aligned}$$

D.h. $[X,Y]$ ist das TVF, welches für alle $f\colon M \to \mathbb{R}$ die Bedingung $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Zu je zwei TVF X,Y auf M gibt es damit die Lie-Klammer $[X,Y]$, die wiederum ein TVF ist. Nun, wenn $M \subset \mathbb{R}^m$ eine UM und X,Y zwei TVF auf M, kann man immer noch ein VF $X(Y)$ bilden. Mit Komponenten $X(Y_i)$. Das Problem liegt darin, dass $X(Y)$ i.A. kein TVF sein wird, selbst wenn X,Y es gewesen sind.
Als Beispiel dienen soll die Sphäre $S^2 \setminus \{N,S\}$ ohne Nord- und Südpol. Wir setzen $X = Y = \frac{\partial}{\partial\vartheta}$ und werden sehen, dass $(X(Y))_p \perp T_pS^2$ für alle p sein wird. Berechnen wir $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ in Koordinaten ϑ,φ des Punktes $p \in S^2$. Wir nutzen als Karte

$$\begin{aligned}
(113)\qquad \psi\colon (0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) &\to S^2 \\
(114)\qquad (\varphi,\vartheta) &\mapsto \begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{115}$$

und

$$X(Y) = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \overset{(115)}{=} - \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}. \tag{116}$$

Allerdings ist $[X,Y] = X(Y) - Y(X)$ ein TVF, wenn X,Y es sind. Arbeiten wir in lokalen Koordinaten $x_1,\dots,x_m$ mit den Darstellungen $X = \sum_{i=1}^m X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^m Y_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \sum_{i,j=1}^m \left[X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, Y_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] && (117)\\
&= \sum_{i,j=1}^m \left[X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(Y_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - Y_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right] && (118)\\
&= \sum_{i,j=1}^m \left[X_i(x)\frac{\partial Y_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - Y_j(x)\frac{\partial X_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] + 0 && (119)\\
&= \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \left[X_i(x)\frac{\partial Y_j(x)}{\partial x_i} - Y_i(x)\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right]\right)}_{=:Z_j(x)}\frac{\partial}{\partial x_j} && (120)\\
&= \sum_{j=1}^m Z_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} && (121)
\end{aligned}$$

Definition 2.21. Seien X,Y zwei TVF auf M. Dann definieren wir
$\nabla_{Y_p}X := \pi_{T_pM}\left(Y_p(x)\right) =: Y_p(x)^\tau$

Nach Konstruktion ist $\nabla_Y X$ ein TVF auf M. Es wird kovariante Ableitung von X nach Y genannt.

Bemerkung 2.22. Wenn X ein TVF ist und $\xi \in T_pM$, ergibt die Notation
$\nabla_\xi X := \pi_{T_pM}\left(\xi(X)\right)$ und δ_{mn}.

Beispielhaft sei $\gamma\colon I \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. γ ist genau dann eine Geodäte, wenn $\forall t \in I:\ \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$. Die Ableitungsvorschrift von ∇ heißt auch Levi-Civita-Zshg. auf M.

Proposition 2.23. *Seien X, Y, Z TVF auf M und f, $\tilde g\colon M \to \mathbb{R}$ glatt. Dann gilt:*

(i) $\nabla_{fX+\tilde gY} Z = f\nabla_X Z + \tilde g \nabla_Y Z$
(ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt* $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \nabla_X Y + \beta \nabla_X Z$
(iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$
(iv) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, *(Torsionsfreiheit des L-C-Zshg.)*
(v) $X\left(g(Y,Z)\right) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right)$, *(L-C-Zshg. Riemannsch)*
(vi) Wenn $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche mit ENF ν, dann gilt $Y(X) = \nabla_Y X + h(X,Y)\nu$

Beweis. (i)

$$\nabla_{fX+\tilde gY} Z = ((fX + \tilde gY)(Z))^\tau \tag{122}$$
$$= (fX(Z) + \tilde gY(Z))^\tau \tag{123}$$
$$= f\nabla_X Z + \tilde g\nabla_Y Z \tag{124}$$

(ii)

$$\nabla_X\left(\alpha Y + \beta Z\right) = \left[X\left(\alpha Y + \beta Z\right)\right]^\tau \tag{125}$$
$$= \alpha X(Y)^\tau + \beta X(Z)^\tau \tag{126}$$
$$= \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z \tag{127}$$

(iii)

$$\nabla_X(fY) = (X(fY))^\tau \tag{128}$$
$$= (X(f)Y + fX(Y))^\tau \tag{129}$$
$$= X(f)Y^\tau + fX(Y)^\tau \tag{130}$$
$$= X(f)Y + f\nabla_X Y \tag{131}$$

(iv)

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = X(Y)^\tau - Y(X)^\tau \tag{132}$$
$$= [X(Y) - Y(X)]^\tau \tag{133}$$
$$= [X,Y]^\tau \tag{134}$$
$$= [X,Y] \tag{135}$$

(v)

$$g(\nabla_X Y, Z) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle \tag{136}$$
$$= \langle X(Y)^\tau, Z\rangle \tag{137}$$
$$= \langle X(Y), Z\rangle \tag{138}$$

(vi) Sei $p \in M$.

$$0 = Y_p(\langle X, \nu_p\rangle) \tag{139}$$
$$= \langle Y_p(X), \nu_p\rangle + \langle X_p, Y_p(\nu)\rangle \tag{140}$$
$$= \langle Y_p(X), \nu_p\rangle - \langle X_p, S_p(Y_p)\rangle \tag{141}$$
$$= \langle Y_p(X), \nu_p\rangle - h_p(X, Y_p) \tag{142}$$

Und damit folgt $\langle Y_p(X), \nu_p\rangle = h_p(X, Y_p) \Rightarrow (iv)$.

□

Um Gaußkrümmung zu beschreiben, brauchen wir aber die zweiten Ableitungen. Seien $M \subset \mathbb{R}$ eine UM. Sei $f \in C^\infty(M)$ und X, Y, Z TVF auf M.

Definition 2.24. .

(i) Hesse-Form von f:

$$(\text{Hess } f)(X,Y) := X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \tag{143}$$

(ii) Zweite kovariante Ableitung von Z nach X, Y:

$$\nabla^2_{X,Y} Z := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z \tag{144}$$

(iii) Riemannscher Krümmungstensor

$$R_{X,Y}(Z) := \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z \tag{145}$$

Bemerkung 2.25. Obige Definitionen sind so gewählt, dass $(\text{Hess } f)_p (X, Y)$ von X_p, Y_P abhängt, aber nicht von ihren Ableitungen. Ebenso hängt $(\nabla_{X,Y} Z)_p$ nur von X_p, Y_p ab. Als Beispiel wählen wir $M = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Mit
$X = \sum_{i=1}^m X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{j=1}^m Y_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ und $f = f(x)$ ergibt sich

$$\text{Hess } (f)(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(Y_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \tag{146}$$

$$- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{147}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X_i(x) Y_j(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \tag{148}$$

Damit ist die Hesse-Form von f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^m$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^m = T_x \mathbb{R}^m$ mit der Matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$. Analog gilt auf $\mathbb{R}^m$

$$\nabla^2_{X,Y}(Z) = \sum_{i,j,k=1}^m \left(X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(Y_j(x) \frac{\partial Z_k}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{i,j,k=1}^m \left(X_i(x) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial Z_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{149}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^m \left(X_i(x) Y_j(x) \frac{\partial^2 Z_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{150}$$

Insbesondere ist dann $R_{X,Y} Z = 0$ auf $\mathbb{R}^m$.

Theorem 2.26. *X, Y, Z, f seien gewählt wie bisher.*

(i) Für $k_1, k_2 \in C^\infty(M)$ ist Hess$f$ *ist symmetrisch und $C^\infty-$linear in X und Y:*

$$(\text{Hess} f)(k_1 X, k_2 Y) = k_1 k_2 \text{Hess} f\,(X, Y) \tag{151}$$

(ii) $\nabla^2_{X,Y}$ ist $C^\infty-$linear in X, Y.
(iii) R_X, YZ ist in allen drei Variablen $C^\infty-$linear. Nebst dem gilt

$$R_{X,Y} Z + R_{Y,X} Z = 0 \tag{152}$$

$$g(R_{X,Y} Z, W) = -g(Z, R_{X,Y} W), \tag{153}$$

wobei W TVF.

Korollar 2.27. *(i) Für jede Funktion $f \in C^\infty(M)$ erhalten wir eine Familie von symmetrischen Bilinearformen* $(\text{Hess} f)_p : T_p M \times T_p M \to \mathbb{R}$.

(ii) Für jedes TVF Z eine glatte Familie von bilinearen Abbildungen

$$\nabla^2_{\cdot,\cdot} Z \colon T_pM \times T_pM \to T_pM \tag{154}$$
$$(X_p, Y_p) \mapsto (\nabla_{X,Y} Z)_p\,. \tag{155}$$

(iii) Wir bekommen eine glatte Familie von bilinearen Abbildungen

$$R_{\cdot,\cdot} \colon T_pM \times T_pM \to T_pM \tag{156}$$
$$(X_p, Y_p) \mapsto \left(Z_p \to R_{X_p,Y_p} Z_p\right). \tag{157}$$

$R_{\cdot,\cdot}$ ist schiefsymmetrisch und nimmt Werte in antiselbstadjungierten Endomorphismen an.

Beweis. Es wird obiger Satz bewiesen.

(i) $\mathrm{Hess}f(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f)$ ist C^∞-linear, weil $\nabla_X Y$ es ist. Es ist ausreichend Symmetrie in X, Y zu zeigen:

$$\mathrm{Hess}f(X,Y) - \mathrm{Hess}f(Y,X) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f) \tag{158}$$
$$= [X,Y](f) - [X,Y](f) \tag{159}$$
$$= 0. \tag{160}$$

(ii) $\nabla^2_{X,Y} Z$ ist C^∞ in X, Y. C^∞-Linearität in Y:

$$\nabla^2_{X,hY} Z = \nabla_X (\nabla_{hY} Z) - \nabla_{\nabla_X hY} Z \tag{161}$$
$$= \nabla_X (h\nabla_Y Z) - \nabla_{X(h)Y + h\nabla_X Y} Z \tag{162}$$
$$= X(h) + h\nabla_X (\nabla_Y Z) - X(h)\nabla_Y Z - h\nabla_{\nabla_X Y} Z \tag{163}$$
$$= h\left(\nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z\right). \tag{164}$$

(iii) Aus (ii) folgt, dass $R_{X,Y}(Z)$ C^∞-linear in den ersten beiden Variablen ist. Aus der Definition folgt $R_{X,Y} Z = -R_{Y,X} Z$. Für die Behauptung über g stellen wir zunächst eine Nebenrechnung an:

$$R_{X,Y} Z = \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z \tag{165}$$
$$= \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_Y (\nabla_X Z) + \nabla_{\nabla_Y X} Z \tag{166}$$
$$= \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{167}$$

Dann gilt:

$$g\left(R_{X,Y}Z,W\right) = g\left(\nabla_X\nabla_Y Z,W\right) - g\left(\nabla_Y\nabla_X Z,W\right) - g\left(\nabla_{[X,Y]}Z,W\right) \tag{168}$$
$$= X\left(g\left(\nabla_Y Z,W\right)\right) - g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right) \tag{169}$$
$$- Y\left(g\left(\nabla_X Z,W\right)\right) + g\left(\nabla_X Z,\nabla_Y W\right) \tag{170}$$
$$- [X,Y]\left(g\left(Z,W\right)\right) + g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}W\right) \tag{171}$$
$$= X\left(Y\left(g\left(Z,W\right)\right)\right) - X\left(g\left(Z,\nabla_Y W\right)\right) - g\left(\nabla_Y Z,\nabla_X W\right) \tag{172}$$
$$- Y\left(X\left(g\left(Z,W\right)\right)\right) + Y\left(g\left(Z,\nabla_X W\right)\right) + g\left(\nabla_X Z,\nabla_Y W\right) \tag{173}$$
$$- [X,Y]\left(g\left(Z,W\right)\right) - g\left(Z,\nabla_{[Y,X]}W\right) \tag{174}$$
$$= -g\left(Z,\nabla_X\nabla_Y W\right) + g\left(Z,\nabla_Y\nabla_X W\right) - g\left(Z,\nabla_{[X,Y]}W\right) \tag{175}$$
$$= +g\left(Z,R_{Y,X}W\right) \tag{176}$$
$$= -g\left(Z,R_{X,Y}W\right) \tag{177}$$

□

Im folgenden stellen wir uns der Frage, wie man R in Koordinaten darstellt. Ist $\psi\colon V \to U \subset M$ eine Karte, so wählen wir Koordinaten $\{x_i\}_{i=1}^n$ und $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^n$ bildet eine Basis des Tangentialraums in beliebigen $p \in U$. Da R linear in allen Argumenten ist, gilt $R_{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \sum_{l=1}^m R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}$, wobei $R_{ijk}^l\colon U \to \mathbb{R}$ glatte Koeffizientenfunktionen sind. Analog zu den Christoffelsymbolen, sind auch diese über die Metrik ausdrückbar, es ist

$$R_{ijkl} := g\left(R_{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right),\frac{\partial}{\partial x_l}\right). \tag{178}$$

Weiterhin ist $\sum_{l=1}^m R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks}$. Es sei daran erinnert, dass

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\left(\nabla_Y Z\right) - \nabla_Y\left(\nabla_X Z\right) - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{179}$$

gilt. Diese Formel wird unter der Berücksichtigung von $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ zur Berechnung der expliziten Darstellung in Koordinaten genutzt werden:

$$\begin{aligned}
R_{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right)\right) && (180)\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\sum_{s=1}^{m}\Gamma_{jk}^{s}\frac{\partial}{\partial x_s}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\sum_{s=1}^{m}\Gamma_{ik}^{s}\frac{\partial}{\partial x_s}\right) && (181)\\
&= \sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial\Gamma_{jk}^{s}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma_{ik}^{s}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_s} && (182)\\
&+ \sum_{s=1}^{m}\left(\Gamma_{jk}^{s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_s} - \Gamma_{ik}^{s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_s}\right) && (183)\\
&= \sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial\Gamma_{jk}^{s}}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma_{ik}^{s}}{\partial x_j}\right) + \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left(\Gamma_{jk}^{r}\Gamma_{ir}^{s} - \Gamma_{ik}^{r}\Gamma_{jr}^{s}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} && (184)\\
& && (185)
\end{aligned}$$

Γ_{ik}^{s} sind in Termen der Metrik (g_{sr}) beschreibbar. R_{ijk}^{l} hängt nur von (g_{sr}) und ihren Ableitungen ab. Aus den Relationen $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$ und
$g\left(R_{X,Y}Z, W\right) = -g\left(Z, R_{X,Y}W\right)$ folgt

$$\begin{aligned}
R_{ijk}^{l} &= -R_{jik}^{l} && (186)\\
R_{ijkl} &= R_{jikl} && (187)\\
R_{ijkl} &= -R_{ijlk} && (188)
\end{aligned}$$

Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, so ist $i, j, k, l \in \{1, 2\}$. Der gesamte Krümmungstensor ist dann durch die Funktion R_{1221} in lokalen Koordinaten eindeutig bestimmt.

Theorem 2.28. *(Theorema Egregrium)*
Sei $(M, \nu) \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche, sei h die zweite Fundamentalform und S der Formoperator von M, sowie R der Krümmungstensor. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}Z &= h(Y,Z)S(X) - h(X,Z)S(Y) && (189)\\
&= K\left(g\left(Y,Z\right)X - g\left(X,Z\right)Y\right), && (190)
\end{aligned}$$

wobei K die Gaußkrümmung ist und X, Y, Z bel. TVF.

Korollar 2.29. *Gauß-Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.*

Beweis. Wir beweisen nun das Theorema Egregrium. Für alle TVF X, Y, Z gilt

$$X\left(Y\left(Z\right)\right)-Y\left(X\left(Z\right)\right)-\left[X,Y\right]\left(Z\right)=0.\,(*) \tag{191}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} X\left(Y\left(Z\right)\right) &= X\left(\nabla_Y Z+h\left(Y,Z\right)\nu\right) && (192)\\ &= \nabla_X\left(\nabla_Y Z\right)+h\left(X,\nabla_Y Z\right)+X\left(h\left(Y,Z\right)\right)\nu+h\left(Y,Z\right)\underbrace{X\left(\nu\right)}_{=-S(X)} && (193)\end{aligned}$$

Analog folgt für Y

$$Y\left(X\left(Z\right)\right)=\nabla_Y\left(\nabla_X Z\right)+h\left(Y,\nabla_X Z\right)+Y\left(h\left(X,Z\right)\right)\nu-h\left(X,Z\right)S\left(Y\right). \tag{194}$$

Nebst diesen gilt:

$$\begin{aligned} \left[X,Y\right] &= \nabla_{[X,Y]}Z+h\left(\left[X,Y\right],Z\right)\nu && (195)\\ &= \nabla_{[X,Y]}Z+h\left(\nabla_X Y,Z\right)\nu-h\left(\nabla_Y X,Z\right)\nu && (196)\end{aligned}$$

Die Operation $(*)^{\tau}$ ergibt

$$\nabla_X\left(\nabla_Y Z\right)-h\left(Y,Z\right)S\left(X\right)-\nabla_Y\left(\nabla_X Z\right)+h\left(X,Z\right)S\left(Y\right)-\nabla_{[X,Y]}\left(Z\right)=0, \tag{197}$$

woraus die erste Behauptung folgt.
Die zweite Behauptung ist äquivalent zu

$$g\left(R_{X,Y}Z,W\right)=K\left(g\left(Y,Z\right)g\left(X,W\right)-g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)\right) \tag{198}$$

für beliebige TVF X, Y, Z, W. Da beide Seiten nur von den Werten in X, Y, Z, W an $p \in M$ abhängen, reicht es die Gleichheit für ein beliebiges $p \in M$ zu verifizieren. Dazu seien $v_1, v_2 \in T_pM$ die Hauptkrümmungsrichtungen. Beide Seiten sind antisymmetrisch in X, Y und in Z, W. Es ist ausreichend Gleichheit für $X_p = Y_p = v_1, Y_p = W_p = v_2$ festzustellen. Bemerke, dass

$$\begin{aligned} h(v_2,v_2) &= g\left(v_2,S(v_2)\right)=\kappa_2 g\left(v_2,v_2\right) && (199)\\ h(v_1,v_2) &= g\left(v_1,S(v_2)\right)=\kappa_2 g\left(v_1,v_2\right)=0 && (200)\end{aligned}$$

gilt. Wir finden somit

$$g\left(R_{v_1,v_2}(v_2), v_1\right) = g\left(h(v_2,v_2)S(v_1) - \underbrace{h(v_1,v_1)S(v_2)}_{0}, v_1\right) \tag{201}$$

$$= g\left(\kappa_2 g(v_2,v_2)\underbrace{S(v_1)}_{\kappa_1 v_1}, v_1\right) \tag{202}$$

$$= \kappa_1\kappa_2 g(v_1,v_1)g(v_2,v_2) \tag{203}$$

$$= K\left(g(v_2,v_2)g(v_1,v_1) - \underbrace{g(v_1,v_2)g(v_2,v_1)}_{=0}\right) \tag{204}$$

$$= K\left(g\left(Y_p, Z_p\right)g\left(X_p, W_p\right) - g\left(X_p, Z_p\right)g\left(Y_p, W_p\right)\right), \tag{205}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 2.30. *Für eine Fläche* $(M,\nu) \subset \mathbb{R}^3$ *gilt in lokalen Koordinaten*

$$R_{1221} = Kg\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{206}$$

Wir haben jetzt für eine UM $M \subset \mathbb{R}^n$ viele Größen der inneren Geometrie gefunden. Die Einbettung nach $\mathbb{R}^n$ hat viele Identifikationen mit sich gebracht, die Berechnnungen zwar erleichtert, jedoch die Strukturen verschleiert haben. Die Idee ist nun sich von der Einbettung zu lösen und die intrinsischen Strukturen zu studieren. Dies führt zu abstrakten Mannigfaltigkeiten. Dabei soll eine solche lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen, aber zusätzlich eine differenzierbare Struktur tragen.

KAPITEL 3

Abstrakte Mannigfaltigkeiten

1. Glatte Strukturen, glatte Abbildungen, Tangentialräume

(eine VL fehlt hier)
Notation: $u^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Projektion auf die i-te Koordinate, $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Standardbasisvektor. Ist (U, x) eine Karte von M, so ist $x^i := u^i \circ x\colon U \to \mathbb{R}$ die i-te Koordinate bzgl. (U, x). Sei M eine MF mit Dimension n.

Definition 3.1. Eine Fuktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt glatt, wenn $f \circ x^{-1}\colon x(U) \to \mathbb{R}$ für jede Karte (U, x) glatt ist.

Bemerkung 3.2. Wegen der Glattheit des Kartenwechsels, reicht es aus die Glattheit für eine M ueberdeckende Familie zu zeigen. $C^\infty := \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ glatt}\}$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra bzgl. punktweiser Addition und Multiplikation.

Definition 3.3. Seien M, N MF mit Dimension n, m und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. f heißt glatt, wenn für jede Karte (U, x) von M und jeder Karte (V, y) von N die Abbildung $y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \to y(V)$ glatt ist.

Definition 3.4. Seien M, N wie oben, $A \subset M$. Eine Abbildung $f\colon A \to N$ ist fortsetzbar, wenn $\exists W \supset A$, $\bar{f}\colon W \to N$ glatt, s.d. $\bar{f}\big|_A = f$.
$C^\infty(A, N) = \{f\colon A \to N \mid f \text{ glatt}\}$.

Definition 3.5. Seien M, N MF. $f\colon M \to N$ heißt Diffeomorphismus (DM), wenn f bijektiv und f, f^{-1} glatt sind. $\mathrm{Diff}(M) := \{f\colon M \to N \mid f \text{ DM}\}$ ist die Diffemomorphismengruppe von M.

Bemerkung 3.6. Nach obiger Definition sind Kartenabbildungen $x\colon U \to x(U)$ DM.

Wir wollen nun den Tangentialraum T_pM für $p \in M$ definieren. Eine hilfreiche Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ haben wir diesmal nicht.

Definition 3.7. Sei $p \in M$, $p \in U$ offen und eine Umgebung $V \subset U$ von p gegeben.
$C^\infty_{0,p}(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid \ f|_V = 0, f \text{ glatt}\}$

Bemerkung 3.8. Wir beobachten $C^\infty_{0,p} \trianglelefteq C^\infty(U)$ ist Ideal. Aus $f \in C^\infty_{0,p},\ g \in C^\infty(U)$ folgt $fg \in C^\infty_{0,p}$.

Definition 3.9. $C^\infty_p := C^\infty(U)/C^\infty_{0,p}$ heißt Algebra der Fuktionenkeime an p.

Ein Funktionenkeim an p ist somit die Äquivalenzklasse glatter Funktionen in einer Umgebung von p.

Definition 3.10. Sei M eine MF, $p \in M$. Ein Tangentialvektor v an p ist eine Abbildung $v\colon C^\infty_p \to \mathbb{R}$, die linear ist und die Leibnizregel $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ erfuellt. $T_pM := \{v \mid v \text{ TV an } p\}$ ist ein VR, der Tangentialraum zu p an M heißt.

Beispiel 3.11. Sei $p \in M$, (U, x) eine Karte um p. Die Koordinatenvektorfelder auf U bzgl. (U, x) sind gegeben als Familie von TV $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_pM, p \in U$.
$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) := \partial_i \left(f \circ x^{-1}\right)(x(p)) = D_{x(p)}\left(f \circ x^{-1}\right)(e_i), i \in \{1, \ldots, n\}$. Durch die Eigenschaften des Differentials in $\mathbb{R}^n$ sind die wirklich TV.
Wenn wir nun beweisen wollen, dass $\dim T_pM = n$, reicht es zu zeigen, dass die ∂_i eine Basis von T_pM bilden.

Proposition 3.12. *Sei M eine n-dim. MF, $p \in M$, (U, x) eine Karte um p. Dann kann jeder Vektor $v \in T_pM$ eindeutig dargestellt werden als $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$.*

Tatsächlich gilt $\alpha_i = v\left(x^i\right)$. Insbesondere ist $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von T_pM und damit ist dessen Dimension n.

Lemma 3.13. *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, s.d. $0 \in V$ und V sternförmig bzgl. 0 ist und sei $f \in C^\infty(V)$. Dann existieren $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(V)$ mit $f_i(0) = \partial_i f(0) = \frac{\partial}{\partial u^i} f(0)$, s.d. $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n u^i f_i(x)$, $x \in V$.*

Beweis. Sei $p \in V$, $C\colon [0,1] \to V, t \mapsto tp$ die gerade Strecke von 0 nach p.
$\varphi := f \circ C\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ glatt.

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{207}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u^i}(tp)p_i\mathrm{d}t \tag{208}$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u^i}(tp)\mathrm{d}t}_{=:f_i(p)} \tag{209}$$

(210)

□

Es folgt der Beweis voriger Proposition.

Beweis.

(1) Wenn $v \in T_pM, f$ konstant in einer Umgeung von $p \Rightarrow v(f) = 0$.
$v(f) = v(C) = Cv(1) = C\left(1v(1) + 1v(1)\right) = 2Cv(1) \Rightarrow v(1) = 0$.

(2) Nach evtl. Verschiebung und Verkleinerung können wir annehmen, dass $0 \in x(U), x(U)$ sternförmig bzgl. 0. Für $f \in C^\infty(U)$ bel. gilt dann nach Lemma $f \circ x^{-1} = f(p) + \sum_{i=1}^n u^i f_i$ mit $f_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f)$ Damit folgt

$$f|_U = f(p) + \sum_{i=1}^n x^i \left(f_i \circ x\right) \tag{211}$$

$$vf = 0 + \sum_{i=1}^n \Big(v\left(x^i\right)\left(f_i \circ x\right)(p) + 0v\left(f_i \circ x\right)\Big) \tag{212}$$

$$= \sum_{i=1}^n v\left(x^i\right)\left(f \circ x\right)(p) \tag{213}$$

$$= \sum_{i=1}^n v\left(x^i\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (f) \tag{214}$$

Es fehlt noch die lineare Unabhängigkeit. Seien $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = 0$. Dann $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (x^j) = \lambda_j$

□

Korollar 3.14. $\forall p \in M :\ \dim T_pM = \dim M$

Seien jetzt $(U,x),(V,y)$ zwei Karten um $p \in M$ mit Basen $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, i \in \{1,\dots,n\}, \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$.
Was ist die Basiswechselmatrix? Nach Prop. gilt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \left(x^i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \tag{215}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \partial_j \left(u^i \circ x \circ y^{-1}\right) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \tag{216}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \partial_j \left(u^i \circ x \circ y^{-1}\right) (y(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \tag{217}$$

Damit ist die Basiswechselmatrix von $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^n$ zu $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^n$ gegeben durch Jacobi von $x \circ y^{-1}$ an $y(p)$. Das liefert folgende Alternativdefinition des Tangentialraumes $T_pM :=$ $\left\{[(U,x),\xi] \mid \xi \in \mathbb{R}^n, (U,x) \text{ Karte um } p, ((U,x),\xi) \sim ((V,y),\eta) :\Longleftrightarrow\ D_{y(p)} \left(x \circ y\right)^{-1} \xi = \eta\right\}$

Definition 3.15. Seien M, N MF und $f\colon M \to N$ glatt. Dann definiert man die Pullbackabildung $f^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(N),\ \varphi \mapsto \varphi \circ f$.

Definition 3.16. Seien M, N MF und $f\colon M \to N$ glatt. Das Differential von f an der Stelle $p \in M$ ist die lineare Abbildung

$$D_pf = f_{*,p}\colon T_pM \to T_pN,$$
$$D_pf(v)(\varphi) = v\left(f^*(\varphi)\right)).$$

Wenn $M = \mathbb{R}^n, N = \mathbb{R}^m$, dann ist $T_pM \simeq \mathbb{R}^n, T_pN \simeq \mathbb{R}^m$. Dann ist

$$D_pf\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum_{j=1}^{m} D_p(f)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\left(u^j\right)\frac{\partial}{\partial u^j} \tag{218}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(u^j \circ f\right)\frac{\partial}{\partial u^j} \tag{219}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} \tag{220}$$

D_pf ist bzgl. Standardbasen also Jacobi von f.

Bemerkung 3.17. Nach wie vor gilt die Kettenregel aus der Analysis:
$D_p(g \circ f) = D_{f(p)}g \circ D_pf$ (Beweis: Übung).

Definition 3.18. Sei M eine MF und $f\colon M \to \mathbb{R}$, $p \in M$. Das Differential von f an p ist $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to \mathbb{R}$, $v \mapsto v(f)$.

Man sieht, dass $\mathrm{d}f(p)$ linear ist, also Element vom Kotangentialraum $(T_pM)^* =: T_p^*M$.

Beispiel 3.19. $M = \mathbb{R}^n, T_pM = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^n$. Dann $\mathrm{d}f(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(p)$. Das Differential hat bzgl. $\frac{\partial}{\partial u^i}$ die Koordinatenzeile $\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u^n}\right)$

Definition 3.20. Das Tangential- bzw. Kotangentialbündel von M wird definiert als die disjunkte vereinigung aller Tangential- bzw. Kotangentialräume:

$$TM \coloneqq \bigsqcup_{p \in M} T_pM, \quad T^*M \coloneqq \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

TM bzw. T^*M sind mit natürlichen “Fußpunktprojektionen” $\pi_{TM}\colon TM \to M$, $\pi_{T^*M}\colon T^*M \to M$ versehen, welche einen Vektor $\xi \in T_pM$ bzw. T_p^*M zuf p abbilden.

Proposition 3.21. *TM und T^*M sind auf natürliche Weise glatte Mannigfaltigkeiten von Dimension* $\dim TM = \dim T^*M = 2 \cdot \dim M$.

Beweis. (wird nachgeliefert, siehe Walschap Prop. 1.4.2) □

Die obige Konstruktion des Differentials liefert dann folgende aussage: für jede glatte Abbildung $f\colon M \to N$ induziert eine glatte Abbildung

$$Df\colon TM \to TN,$$

$$v \mapsto D_{\pi(v)}f(v)$$

(dies ist die “Vereinigung von den D_pf’s über alle $p \in M$”). Df wird auch das (globale) Differential von f genannt. Nach Konstruktion von Df ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{TM}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{TN}} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

2. Satz über implizite Funktion; Untermannigfaltigkeiten

2.1. Satz über implizite Funktion.

Definition 3.22. Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $f\colon M \to N$ glatt. Der Rang von f an p ist definiert als der Rang (= Dimension des Bildes) des Differentials D_pf.

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ glatt. Offensichtlich ist der Rang von f an jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ kleiner oder gleich $\min(n,k)$. Man sagt, f habe *maximalen Rang* an einem Punkt, wenn der Rang von f an p gleich $\min(n,k)$ ist.
Natürlicherweise tauchen hier zwei Varianten auf:

- $n \leqslant k$; dann ist der mögliche maximale Rang gleich n. Ein Beispiel für eine Abbildung mit maximalem Rang n (an jedem Punkt) ist die Einbettung $\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\iota(a_1,\dots,a_n) = (a_1,\dots,a_n,0,\dots,0)$.
- $n \geqslant k$; dann ist der mögliche maximale Rang gleich k. Ein Beispiel für eine Abbildung mit maximalem Rang k (an jedem Punkt) ist die Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\pi(a_1,\dots,a_n) = (a_1,\dots,a_k)$.

Die folgende Version des Satzes über implizite Funktion aus der Analysis zeigt, dass jede Abbildung, welche maximalen Rang an einem Punkt p hat, lokal wie die Einbettung ι bzw. die Projektion π aussieht.

Theorem 3.23. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ glatt mit $f(0) = 0$. Dann gilt:*

(1) Wenn $n \leqslant k$ und f maximalen Rang ($= n$) an 0 hat, dann gibt es eine Karte g von $\mathbb{R}^k$ an 0 mit $g \circ f = \iota$ auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$;
(2) Wenn $k \leqslant n$ und f maximalen Rang ($= n$) an 0 hat, dann gibt es eine Karte h von $\mathbb{R}^n$ an 0 mit $f \circ h = \pi$ auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$;

Beweis. Siehe Analysis-Vorlesung oder Walschap, Theorem 1.5.3. □

2.2. Untermannigfaltigkeiten. Es gibt zwei gängige Definitionen einer Untermannigfaltigkeit $N \subset M$, die sich dadurch unterscheiden, welche Eigenschaften man von der Inklusionsabbildung $i\colon N \to M$ verlangt.

Definition 3.24. Seien N, M Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $i\colon N \to M$ heißt Immersion, wenn $D_pf\colon T_pM \to T_pN$ injektiv für jedes $p \in M$ ist. Eine Immersion $i\colon N \to M$ heißt Einbettung, wenn $i\colon N \to i(N) \subset M$ ein Homöomorphismus ist (d.h. i ist injektiv und $i^{-1}\colon i(N) \to N$ ist stetig).

Dementsprechend gibt es zwei Definitionen einer Untermannigfaltigkeit, die in der Literatur zu finden sind:

- eine (immersierte) Untermannigfatigkeit $i\colon N \to M$ ist eine Mannigfaltigkeit N zusammen mit einer injektiven Immersion $i\colon N \to M$;

- eine (eingebettete) Untermannigfaltigkeit $i\colon N \to M$ ist eine Mannigfaltigkeit N zusammen mit einer Einbettung $i\colon N \to M$.

Wir werden in diesem Kurs das Wort "Untermannigfaltigkeit" stets für eingebettete Untermannigfaltigkeit benutzen.
Man sollte anmerken, dass wegen des Satzes über implizite Funktion jede Immersion lokal eine Einbettung ist:

Proposition 3.25. *Sei $i\colon N \to M$ eine Immersion,* $\dim N = n$, $\dim M = m$. *Dann gilt: für jedes $p \in N$ gibt es eine Umgebung V von p in N und eine Karte (U, y) mit $i(p) \in U \subset M$, so dass:*

(1) $q \in i(V) \cap U$ genau dann, wenn $y^{n+1}(q) = \cdots = y^m(q) = 0$ (anders gesagt, $y(i(V) \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap y(V)$;
(2) $i|_V$ ist eine Einbettung.

Beweis. Sei x eine Kartenabbildung um p mit $x(p) = 0$, $\tilde{y}$ eine Kartenabbildung um $i(p)$ mit $\tilde{y} \circ i(p) = 0$. Dann hat $\tilde{y} \circ i \circ x^{-1}$ maximalen Rang ($= n$) an 0, also gibt es nach dem Satz über implizite Funktion (Satz 3.23) eine Karte g von $\mathbb{R}^m$ und eine Umgebung W von 0 mit $g \circ \tilde{y} \circ i \circ x^{-1}|_W = \iota|_W$, wobei $\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die kanonische Einbettung ist. Sei $U \coloneqq x^{-1}(W)$, $y = g \circ \tilde{y}$; dann gilt (1) nach Konstruktion. (2) folgt dann, weil $i|_U = y^{-1} \circ \iota \circ x|_U$ eine Verkettung von Einbettungen ist. □

2.3. Satz vom regulären Wert. Der Satz vom regulären Wert ist von zentraler Bedeutung in Differentialgeometrie, weil er uns erlaubt, Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

Definition 3.26. Seien M, N Mannigfaltigkeiten von Dimension m bzw. n, $f\colon M \to N$ glatt. Ein Punkt $p \in M$ heißt regulärer Punkt von f, wenn $RgD_pf = n$; andernfalls heißt p ein kritischer Punkt von f. Ein Punkt $q \in N$ heißt regulärer Wert von f, wenn $f^{-1}(q)$ keine kritischen Punkte enthält (z.B. weil $q \notin f(M)$). Andernfalls heißt q kritischer Wert von f.

Wenn $m \geqslant n$ ist (und das ist für uns der interessante Fall), heißt also die Bedingung, dass $q \in N$ ein regulärer Wert von f ist so viel wie: an jedem Urbildpunkt von q hat f maximalen Rang ($= n$).

Theorem 3.27 (Satz vom regulären Wert)**.** *Seien M, N Mannigfaltigkeiten von Dimension m bzw. n mit $m \geqslant n$, $f\colon M \to N$ glatt. Wenn $q \in f(M)$ ein regulärer Wert* *ist, dann ist $A := f^{-1}(q) \subset N$ (= die Faser von f an q) eine Untermannigfaltigkeit von M.*

Beweis. (wird nachgeliefert, siehe Walschap, Theorem 1.6.1) $\square$

Beispiel 3.28. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \|a\|^2$, erfüllt $Df(a) = 2(a_1, \ldots, a_{n+1})$; der Rang des Differentials ist also maximal (= 1) an jedem Punkt außer 0. Das heißt, die Sphäre vom Radius $r > 0$, $S_r := f^{-1}(r)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkung 3.29. Der (höchst nichttriviale) Satz von Sard besagt, dass eine glatte Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ($m \geqslant n$) stets "sehr viele" reguläre Werte hat (insbesondere ist die Menge der regulären Werte stets dicht in $\mathbb{R}^n$). Das heißt, dass eine "generische" Faser von f eine Untermannigfaltigkeit ist.

3. Vektorfelder und Flüsse

Wir haben bereits beim Studium von Untermannigfaltigkeiten gesehen, dass Tangentialvektorfelder eine große Rolle in Differentialgeometrie spielen. Wir werden sie nun im Kontext von abstrakten Mannigfaltigkeiten einführen und untersuchen.

Definition 3.30. Sei M eine Mannigfaltigkeit, TM sein Tangentialbündel und $\pi\colon TM \to M$ die Projektionsabbildung. Ein Vektorfeld X auf M ist eine glatte Abbildung $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ (d.h. $X(p) \in T_pM$ für jedes $p \in M$).

Wie früher führen wir einige Notation zum Thema Vektorfelder ein.

(1) Die Vektorfelder bilden ein Vektorraum bezüglich punktweiser Operationen, weil der Wert eines Vektorfeldes an jedem Punkt p in dem Vektorraum T_pM liegt. Der Vektorraum der Vektorfelder auf M wird durch $\Gamma(TM)$, $\mathrm{Vect}(M)$ oder $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.
(2) Man kann Vektorfelder mit glatten Funktionen multiplizieren: wenn $X\colon M \to TM$ ein Vektorfeld ist und $f \in C^\infty(M)$, dann ist $fX\colon p \mapsto f(p)X(p)$ auch ein Vektorfeld.
(3) Der Wert von X an einem Punkt $p \in M$ wird durch $X(p)$ oder X_p bezeichnet;
(4) Da Tangentialvektoren auf Funktionen durch Ableitungen wirken, kann man ein Vektorfeld X auf eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ anwenden und eine neue Funktion $X(f) \in C^\infty(M)$ bekommen mit
$$(X(f))(p) = X_p(f)$$

(5) wenn (U, x) eine Karte um $p \in M$ ist, definiert sie die Koordinatenvektorfelder $\partial/\partial x^i$ auf U, wie im Beispiel 3.11 bestimmt. Daher kann jedes Vektorfeld auf U dargestellt werden als

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} dx^i(X) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Umgekehrt definiert in diesem Fall eine beliebige "Linearkombination"

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit $f_i \in C^\infty(V)$, $i = 1, \ldots, n$, ein Vektorfeld X auf V.

Beispiel 3.31. Wenn $M = \mathbb{R}^n$, dann gilt $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (Übung!). In diesem Falle kann man Vektorfelder $X \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}\mathbb{R}^n$ mit glatten Funktionen $\underline{X} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identifizieren: ein Vektorfeld X entspricht eindeutig der Funktion $u \mapsto (X(u^1), \ldots, X(u^n))$, also seinen Koordinaten bzgl. $\frac{\partial}{\partial u^i}$.

Wir notieren folgende einfache Proposition:

Proposition 3.32. *Sei $X \colon U \to TM$ eine (a priori nicht glatte) Abbildung mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(1) X ist ein Vektorfeld (d.h. X ist glatt als Abbildung);
(2) für jede Karte (V, x) mit $V \subset U$ gilt $X(x^i) \in C^\infty(V)$;
(3) für jede Karte (V, x) mit $V \subset U$ und jede $f \in C^\infty(V))$ gilt $X(f) \in C^\infty(V)$.

3.1. Flüsse von Vektorfeldern. Eines der wichtigen Ergebnisse in der Analysis ist der Satz über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (der Satz von Picard-Lindelöf). Dieser gilt auch auf Mannigfaltigkeiten und bildet somit interessanten Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und Diffeomorphismen. Wir fangen mit folgender Version des klassischen Satzes von Picard-Lindelöf in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 3.33 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von DGLs erster Ordnung in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \colon U \to \mathbb{R}^n$ glatt. Dann existiert für jedes $a \in U$ eine Umgebung W von a, ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\psi \colon I \times W \to U$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\psi(0, u) = u$,
(2) $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, u) = F(\psi(t, u))$.

Die Eindeutigkeit bedeutet hier: wenn $W_1, W_2 \subset W$ beliebige Teilmengen sind und die Abbildungen $\psi_1\colon I_1 \times W_1 \to U$, $\psi_2\colon I_2 \times W_2 \to U$ wie oben die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen, dann stimmen sie auf $I_1 \times W_1 \cap I_2 \times W_2$ überein.

Die Abbildung $\psi(t,u)$ wird interpretiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\psi}(t) = F(\psi(t)) \tag{221}$$

mit Anfangsbedingung $\psi(0) = u$ am Zeitpunkt t: die zweite Bedingung besagt, dass ψ die Differentialgleichung löst, und die erste Bedingung besagt, dass der Anfangswert an $t = 0$ gleich u ist.
Die Differentialgleichung (221) kann man auf einer Mannigfaltigkeit M auch leicht interpretieren: eine glatte Kurve $\gamma\colon I \to M$ hat an jeder Stelle einen Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t) = (D_t\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \in T_pM$ – die linke Seite hat somit eine Interpretation als Element in T_pM. Die rechte Seite soll dann durch Vorgabe eines Tangentialvektors an jedem Punkt auf M, d.h. eines Vektorfeldes auf M, bestimmt sein.
Somit lässt sich der obige Satz wie folgt auf Mannigfaltigkeiten interpretieren:

Theorem 3.34 (Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M. Dann existiert für jedes $q \in M$ eine Umgebung V von q, ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\Phi\colon I \times V \to M$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\Phi(0,p) = p$,
(2) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,p) := \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\right)(t,p) = X(\Phi(t,p))$.

Die Eindeutigkeit bedeutet hier: wenn $W_1, W_2 \subset W$ beliebige Teilmengen sind und die Abbildungen $\Phi_1\colon I_1 \times W_1 \to U$, $\Phi_2\colon I_2 \times W_2 \to U$ wie oben die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen, dann stimmen sie auf $I_1 \times W_1 \cap I_2 \times W_2$ überein.

Beweis. Sei (U,x) eine Karte um q. Setze $G := x(U)$, $a := x(q)$,

$$F := (dx^1(X), \ldots, dx^n(X)) \circ x^{-1}\colon G \to \mathbb{R}^n$$

und wende den vorigen Satz an, um eine Abbildung $\psi\colon I \times W \to G$ zu bekommen. Die Abbildung $\Phi := x^{-1} \circ \psi$ ist dann nach Konstruktion die gesuchte: die Eigenschaften (1) und (2), geschrieben in Koordinaten mit Hilfe von x, sind genau die Bedingungen (1) und (2) des vorigen Satzes. $\square$

Die Abbildung Φ aus dem obigen Satz wird auch *lokaler Fluss* von X genannt. Für jedes $p \in V$ ist dann $\gamma(t) := \Phi(t,p)$ eine Kurve auf M, welche die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

sowie die Anfangsbedingung $\gamma(0) = 0$ erfüllt. Solche Kurven heißen *Integralkurven* von X. Der obige Satz ist eine lokale Aussage, und es besteht *a priori* keine Hoffnung, das "Zeitintervall" I vergrößern zu können: es gibt sogar im Eindimensionalen Differentialgleichungen, dessen Integralkurven in einer endlichen Zeit ins Unendliche laufen, z.B. $\dot{x} = x^2$ in $\mathbb{R}$ (Übung: überzeugen Sie sich, dass die Integralkurven hier ins Unendliche in endlicher Zeit laufen und bestimmen Sie das zugehörige Vektorfeld!). Es gibt allerdings immer einen maximalen Definitionsbereich des Flusses:

Theorem 3.35 (Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M. Dann existiert eine eindeutig bestimmte maximale offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times M$ mit $\{0\} \times M \subset W$ und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\Phi\colon W \to M$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\Phi(0,p) = p$,
(2) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,p) := \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\right)(t,p) = X(\Phi(t,p))$,
(3) für jedes $p \in M$, $W \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = I_p \times \{p\}$, wobei $I_p \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I_p$ ist.

Beweis. Der vorige Satz liefert die Existenz einer offenen Teilmenge

$$W_0 = \bigcup_{q \in M} I_q \times V_q$$

zusammen mit einer eindeutigen glatten Abbildung $\Phi\colon W_0 \to M$ mit gewünschten Eigenschaften (die Eindeutigkeitsaussage aus dem vorigen Satz impliziert, dass Φ wohldefiniert auf W_0 ist).
Sei nun $\mathcal{W} = \{(W, \Phi \mid (W,\Phi) \text{ erfüllen } (1),(2),(3)\ \}$ die Familie von allen offenen Teilmengen, welche die Aussage des Satzes erfüllen. Wenn nun (W', Φ') und (W'', Φ'') zwei Elemente aus $\mathcal{W}$ sind, folgt aus der Eindeutigkeit, dass Φ' und Φ'' auf $W' \cap W''$ übereinstimmen, weswegen sie sich zu einer eindeutig bestimmten glatten Abbildung $\Phi\colon W' \cup W'' \to M$ fortsetzen. Das ergibt, dass auf der Vereinigung

$$W := \bigcup_{(W',\Phi') \in \mathcal{W}} W'$$

eine glatte Abbildung $\Phi\colon W \to M$ durch $\Phi|'_W := \Phi'$ wohldefiniert ist. Sie erfüllt offensichtlich die Aussage des Satzes. $\square$

Definition 3.36. Die Abbildung $\Phi\colon W \to M$ heißt maximaler Fluss von X. X heißt vollständig, wenn $W = \mathbb{R} \times M$ ist, d.h. wenn der Fluss immer definiert ist.

Übung 3.37. Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig ist.

Sei X nun ein vollständiges Vektorfeld auf M. Wir definieren $\Phi_t\colon M \to M$ durch $\Phi_t(p) := \Phi(t,p)$ und beobachten folgende fundamentale Eigenschaft:

Proposition 3.38.

$$\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$$

Beweis. Nach Definition ist $\Phi_{t_1+t_2}(p)$ der Wert an $t = t_1 + t_2$ der Integralkurve γ_p von X mit Anfangswert p. $\Phi(t_2)(p)$ ist der Wert derselben Integralkurve an $t = t_2$, und $\Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(p))$ ist der Wert an $t = t_1$ der Integralkurve von X mit Anfangswert $\Phi_{t_2}(p)$. Nach Eindeutigkeit ist die letztere aber gleich $\gamma_p(t + t_2)$, und ihr Wert an t_1 ist $\gamma_p(t_1 + t_2)$, wie gewünscht. $\square$

Korollar 3.39.

(1) $\Phi_t\colon M \to M$ is ein Diffeomorphismus für jedes $t \in \mathbb{R}$;
(2) die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$, $t \mapsto \Phi_t$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 3.40. Eine glatte Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$ mit $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$ ($\Phi_t(p) := \Phi(t,p)$) heißt eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen von M.

Gegeben eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen, bekommen wir das Vektorfeld X, welches sie erzeugt, auch zurück durch

$$X_p := \Phi_{*,(0,p)} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Dieses Vektorfeld hat nach Konstruktion Φ als zugehörigen maximalen Fluss: diese Gleichung ist genau die Bedingung (2) aus der Definition des Flusses eines Vektorfeldes. Somit haben wir festgestellt:

Proposition 3.41. *Es gibt eine 1:1-Korrespondenz zwischen Einparametergruppen von Diffeomorphismen von M und vollständigen Vektorfeldern auf M.*

4. Lie-Klammer von Vektorfeldern; Lie-Gruppen

4.1. Lie-Klammer. Die Lie-Klammer von Vektorfeldern haben wir schon in der Theorie der Untermannigfaltigkeiten gesehen. Wir werden gleich sehen, dass sie auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten wohldefiniert ist.
Sei M eine Mannigfaltigkeit und X, Y zwei Vektorfelder auf M. Definiere die Abbildung $X_pY : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ durch

$$X_pY([f]) \coloneqq X_p([Y(f)]).$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear, aber *keine Derivation*, also kein Tangentialvektor. Allerdings ist interessanterweise $X_pY - Y_pX$ eine Derivation:

$$\begin{aligned} X_pY - Y_pX(fg) &= X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) \\ &= X_p(f \cdot Y(g) + g \cdot Y(f)) - Y_p(f \cdot X(g) + g \cdot X(f)) \\ &= X_p(f) \cdot Y_p(g) + f(p)X_p(Y(g)) + X_p(g) \cdot Y_p(f) + g(p)X_p(Y(f)) \\ &\quad -Y_p(f) \cdot X_p(g) - f(p) \cdot Y_p(X(g)) - Y_p(g) \cdot X_p(f) - g(p)Y_p(X(f)) \\ &= f(p)(X_pY - Y_pX)(g) + g(p)(X_pY - Y_pX)(f) \end{aligned}$$

und gibt somit einen Tangentialvektor $X_pY - Y_pX \in T_pM$.

Definition 3.42. Die Lie-Klammer zweier Vektorfelder X, Y auf M ist das Vektorfeld $[X, Y]$ definiert durch

$$[X, Y]_p \coloneqq X_pY - Y_pX.$$

Wenn man die Vektorfelder X, Y in Koordinaten einer Karte (U, x) als

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$Y = \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ausdrückt ($X_i, Y_j \in C^\infty(U)$), dann findet man leicht für beliebige glatte Funktion $f \in C^\infty(U)$

$$X_pY(f) = \sum_{i,j=1}^n X_iY_j \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

und somit

$$X_pY - Y_pX = \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

also die Formel, die wir schon für Untermannigfaltigkeiten hergeleitet haben. Somit gelten auch die anderen damals festgestellten Eigenschaften der Lie-Klammer:

Proposition 3.43. *Die Lie-Klammer* $[\cdot,\cdot]\colon \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ *ist eine bilineare Abbildung auf dem Vektorraum der Vektorfelder auf* M *und hat folgende Eigenschaften:*

(1) sie ist antisymmetrisch: $[X,Y]=-[Y,X]$ *für alle Vektorfelder* X,Y*;*
(2) sie erfüllt die Jacobi-Identität:

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0,\quad X,Y,Z\in\Gamma(TM).$$

Diese algebraische Struktur, wie wir gleich sehen werden, taucht nicht nur bei Vektorfeldern auf, sondern spielt auch bei der Theorie der "glatten Gruppen" (Lie-Gruppen) eine wichtige Rolle. Sie verdient somit den eigenen Namen:

Definition 3.44. Eine Lie-Algebra $(V,[\cdot,\cdot])$ ist ein Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon V\times V\to V$, welche antisymmetrisch ist und die Jacobi-Identität

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

erfüllt. Ein Homomorphismus zwischen Lie-Algebren $(V_1,[\cdot,\cdot])$, $(V_2,[\cdot,\cdot])$ ist eine lineare Abbildung $f\colon V_1\to V_2$ mit $f([v,v'])=[f(v),f(v')]$.

Beispiel 3.45. Ein auf den ersten Blick ganz anderes Beispiel einer Lie-Algebra bilden Matrizen: der Vektorraum der Matrizen $M_n(\mathbb{R})$ mit dem Kommutator $[A,B]=AB-BA$ ist eine Lie-Algebra (Übung: überzeugen Sie sich, dass die Jacobi-Identität gilt!).

Eine der wichtigen Eigenschaften der Lie-Klammer von Vektorfeldern besteht darin, dass sie "natürlich" (= invariant unter Diffeomorphismen) ist. Um das formulieren zu können, müssen wir erst mal verstehen, wie sich Vektorfelder unter Diffeomorphismen abbilden. Wenn $f\colon M\to N$ ein Diffeomorphismus ist, definiert die Vorschrift

$$(f_*X)(f(p))=D_pf(X_p)\tag{222}$$

ein Vektorfeld f_*X auf N. Dieses wird *Pushforward* von X durch f genannt. Da Diffeomorphismen invertierbar ist, ist jedes Vektorfeld auf N ein Pushforward eines Vektorfeldes von M.

Warnung! Wenn $f\colon M\to N$ irgendeine glatte Abbildung ist, liefert die Formel (222) **kein** wohldefiniertes Vektorfeld auf N: ein Punkt $q\in N$ kann mehrere Urbilder haben, die keinen eindeutigen Bildvektor definieren lassen.

Nach Definition gilt für $\varphi \in C^\infty(N)$

$$(f_*X(\varphi))(f(p)) = (D_pf(X_p))(\varphi) = X_p(f^*(\varphi)), p \in M,$$

also

$$f^*(f_*X(\varphi)) = X(f^*(\varphi)) \tag{223}$$

oder

$$f_*X = (f^*)^{-1} \circ X \circ f^* \tag{224}$$

Lemma 3.46. *Ein Diffeomorphismus $f\colon M \to N$ induziert einen Isomorphismus f_* der Lie-Algebren $\Gamma(TM)$ und $\Gamma(TN)$:*

$$f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y], \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$

Beweis. Sei $\varphi \in C^\infty(N)$. Unter Benutzung von (224) bekommen wir

$$\begin{aligned}(f_*[X,Y])(\varphi) = ((f^*)^{-1} \circ [X,Y] \circ f^*)(\varphi) = (f^*)^{-1}(X_p(Y(f^*\varphi)) - Y_p(X(f^*\varphi)))\\ = (f^*)^{-1}(X_p(f^*(f_*Y(\varphi))) - Y_p(f^*(f_*X(\varphi))))\\ = (f_*X_p)(f_*Y(\varphi)) - (f_*Y_p)(f_*X(\varphi)) = [f_*X, f_*Y](\varphi).\end{aligned}$$

□

4.2. Lie-Gruppen. In der Mathematik tauchen schon in den ersten Semestern der linearen Algebra Matrizengruppen. Diese haben auf natürliche Weise Koordinaten (= die Matrixeinträge), welche ihnen auch die Struktur der Mannigfaltigkeiten geben. Diese Klasse von "glatten" Gruppen bildet eine zentrale Klasse von Objekten in der reinen Mathematik, die sogenannten Lie-Gruppen.

Definition 3.47. Eine Lie-Gruppe G ist eine glatte Mannigfaltigkeit zusammen mit glatten Abbildungen $\circ\colon G \times G \to G$ und $(\cdot)^{-1}\colon G \to G$, so dass $(G, \circ, (\cdot)^{-1})$ eine Gruppe ist.

Beispiel 3.48. $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ ist eine Lie-Gruppe:

- es ist eine Mannigfaltigkeit, weil es eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist (die natürlichen Koordinaten sind somit einfach durch Matrixeinträge gegeben)
- die Multiplikation ist glatt, weil es durch Polynome in Matrixeinträgen definiert ist (der (i,j)-te Eintrag des Produkts AB ist $\sum a_{ik}b_{kj}$)

- die Inversion ist glatt wegen der Cramerschen Regel:
$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det A},$$
wobei $\mathrm{adj}(A)$ die Adjunkte von A ist: $\mathrm{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$, wobei M_{ji} die Determinante der Matrix ist, welche durch Streichung der j-ten Zeile und i-ten Spalte aus A entsteht.

Analog ist $GL(n, \mathbb{C})$ eine Lie-Gruppe.

Weitere klassische Lie-Gruppen aus der linearen Algebra wie $O(n)$, $U(n)$ etc. definiert man natürlicherweise als Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$ oder $GL(n, \mathbb{C})$. Um zu zeigen, dass sie Lie-Gruppen sind, kann man entweder den Satz vom regulären Wert oder den folgenden tiefen Satz von Cartan (welchen wir leider hier nicht beweisen können) benutzen:

Theorem 3.49 (Cartan). *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G. Dann ist H eine Untermannigfaltigkeit von G, also automatisch auch eine Lie-Untergruppe.*

Man erhält somit folgende "klassische" Lie-Gruppen:

- $SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$),
- $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = 1\}$,
- $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$,
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^* A = 1\}$,
- $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$.

4.3. Lie-Gruppen und Lie-Algebren. Wir werden jetzt einen interessanten strukturellen Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren herstellen.
Sei G eine Lie-Gruppe. Die Linkswirkung von G auf sich selbst definiert für jedes $g \in G$ einen Diffeomorphismus $L_g \colon G \to G$, $h \mapsto gh$.

Definition 3.50. Sei G eine Lie-Gruppe. Ein Vektorfeld X auf G heißt *linksinvariant*, wenn $(L_g)_* X = X$ für jedes $g \in G$.

Nach Lemma 3.46 bilden linksinvariante Vektorfelder eine Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra der Vektorfelder auf G.

Definition 3.51. Die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(G)$ einer Lie-Gruppe G ist die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder auf G.

Da die ganze Lie-Algebra der Vektorfelder immer unendlichdimensional ist, könnte man denken, dass die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe auch unübersichtlich ist. Tatsächlich ist es immer ein endlichdimensionaler Vektorraum, welcher mit dem Tangentialraum an $1 \in G$ identifiziert werden kann:

Lemma 3.52. *Die Auswertungsabbildung an* 1*,*

$$\mathrm{ev}_1 \colon \mathrm{Lie}(G) \to T_1 G$$
$$X \mapsto X(1) = X_1$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Jedes linksinvariante Vektorfeld X ist eindeutig durch sein Wert an 1 bestimmt, weil die Auswertung der Gleichung

$$(L_g)_* X = X$$

an $g \in G$ liefert

$$(L_g)_{*,1} X_1 = X_g.$$

Somit ist ev_1 injektiv. Es ist auch surjektiv, weil für jedes $v \in T_1 G$ das Vektorfeld

$$X(g) := (L_g)_{*,1}(v)$$

nach Konstruktion linksinvariant ist. □

Somit gilt $\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim G$, also ist die Lie-Algebra immer endlichdimensional. Das obige Lemma erlaubt uns, den Vektorraum $T_1 G$ mit der Lie-Algebra von G zu identifizieren und somit selbst als Lie-Algebra zu betrachten. Die Lie-Klammer von zwei Elementen aus $T_1 G$ ist dann als Wert an $1 \in G$ der von ihnen induzierten linksinvarianten Vektorfeldern definiert, was erst mal eine nicht ganz durchsichtige Konstruktion ist.
Daher berechnen wir jetzt explizit die Lie-Algebra von der Matrixgruppe $GL(n, \mathbb{R})$ (und somit auch aller ihrer Lie-Untergruppen). Es stellt sich heraus, dass es genau das Beispiel der Matrizen mit dem Kommutator wird!
Da $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ als offene Teilmenge, gilt: $T_1 GL(n, \mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$. Wir bezeichnen den durch das obige Lemma und diese Tatsache erhaltenen Vektorraumisomorphismus $\psi \colon \mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) \to M_n(\mathbb{R})$.
Wir betrachten die Lie-Algebra-Struktur auf $M_n(\mathbb{R})$ aus Beispiel 3.45: $[A, B] = AB - BA$.

Proposition 3.53. $\psi \colon \mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) \to M_n(\mathbb{R})$ *ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren:*

$$\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)], \quad X, Y \in \mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R})).$$

Beweis. Seien X, Y linksinvariante Vektorfelder auf $GL(n,\mathbb{R})$, und $M = X(1) \in M_n(\mathbb{R})$, $N = Y(1) \in M_n(\mathbb{R})$. Da $GL(n,\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ als offene Teilmenge, können wir Vektorfelder mit Funktionen $GL(n,\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ identifizieren (siehe Beispiel 3.31). Da X, Y linksinvariant sind, gilt mit dieser Identifikation

$$X(A) = AM, \quad Y(A) = AN, \quad A \in GL(n,\mathbb{R}),$$

und wir müssen den Kommutator dieser Vektorfelder an 1 berechnen. Dafür können wir z.B. die Formel für den Kommutator in Koordinaten $(u^{ij})_{i,j=1}^n$ benutzen:

$$X(A) = \sum_{i,j=1}^n (AM)_{ij} \frac{\partial}{\partial u^{ij}}, \quad Y(A) = \sum_{k,\ell=1}^n (AN)_{k\ell} \frac{\partial}{\partial u^{k\ell}},$$

$$\begin{aligned}[X,Y]_1 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left(M_{ij} \frac{\partial (AN)_{k\ell}}{\partial A_{ij}} - N_{ij} \frac{\partial (AM)_{k\ell}}{\partial A_{ij}} \right) \Big|_{A=1} \frac{\partial}{\partial u^{k\ell}} \\ = \sum_{k,\ell=1}^n (MN - NM)_{k\ell} \frac{\partial}{\partial u^{k\ell}}.\end{aligned}$$

Hier haben wir folgende Beobachtung benutzt: die Abbildung $R_N \colon A \mapsto AN$ ist linear in A, also ist sie gleich ihrem eigenen Differential, und es gilt

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial (AN)_{k\ell}}{\partial A_{ij}} M_{ij} \Big|_{A=1} \right)_{k\ell} = (D_1 R_N(M))_{k\ell} = (MN)_{k\ell},$$

und analog für den zweiten Summanden.
Also gilt

$$\psi([X,Y]) = MN - NM = [M,N] = [\psi(X), \psi(Y)],$$

wie gewünscht. ☐

Somit ist die Lie-Algebra von $GL(n,\mathbb{R})$ identifiziert: sie ist isomorph zu den Matrizen $M_n(\mathbb{R})$ mit dem Kommutator $[M,N] = MN - NM$; diese wird auch durch $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ bezeichnet.
Für alle oben eingeführten klassischen Lie-Gruppen ($O(n)$, $SL(n)$ etc.) identifizieren sich somit die Lie-Algebren mit Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ oder $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ mit dem Matrixkommutator. Wir werden in den Übungen sehen, wie man diese Lie-Algebren dann explizit ausrechnet.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis