DGEO Sommersemester 2019 alpha version, ohne Gewähr

Dozent: Satz: Version:

Compiled on 27. September 2019.

Inhaltsverzeichnis

Erinnerungen an WS

Wir studieren Mannigfaltigkeiten (Mfg).

$\approx$ topologische Räume, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen + glatte `Strukturen` von glatten Abbildungen zu sprechen.

Konkret: um jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \ni p$ zusammen mit einer Karte $x\colon U \to \mathbb{R}^n$

Idee: da M lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, versucht man, Objekte aus der Analysis auch auf M zu verstehen.

`Wichtig dabei`: das Objekt auf M muss koordinatenunabhängig werden! (Physik verlangt das auch!)

1. `Tangentialraum` „über" jedem Punkt $p \in M$ „hängt" ein Vektorraum T_pM, $\dim T_pM = \dim M$ Elemente von T_pM heißen Tangentialvektoren.

   $$\begin{aligned} T_pM &= \{\text{Ableitungen von Funktionen an } p\} \\ &= \{\partial\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ linear} \mid \partial(fg) = f(p)\cdot\partial(g) + g(p)\cdot\partial(f)\} \end{aligned}$$

   Motto: Tangentialvektor $\hat{=}$ Richtungsableitung!

   TODO Bild

   $\pi\colon TM \to M$ ist glatt $v \in T_pM \mapsto p$

   Nutzen: wir verstehen „wirklich", was Ableitungen sind

   Früher:

   $$\begin{aligned} f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \rightsquigarrow \quad & D_pf \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \\ & Df \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

   Jetzt in Diffgeo:

   $$f \in C^\infty(M,N) \underset{p\in M}{\rightsquigarrow} D_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N \text{ linear}$$

2. ODEs als Flüsse von Vektorfeldern

Vektorfeld: $X \colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = id_M$ ($\Leftrightarrow X(p) \in T_pM$) Gegeben $X \rightsquigarrow \Phi \colon \underset{\subseteq \mathbb{R} \times M}{W} \to M$ (Fluss des Vektorfeldes)

s.d. $\forall p \in M$ $\gamma_p(t) := \Phi(t,p)$ die ODE

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

lässt

3. Lie-Klammer von Vektorfeld und Lie-Gruppen Auf Vektorfeldern auf M ergibt es eine interessante algebraische Struktur: die Lie-Klammer: gegeben $X, Y \in \underbrace{\Gamma(TM)}_{Vektorfeld} \rightsquigarrow [X,Y] \in \Gamma(TM)$

   $(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot])$ wird zu einer Lie-Algebra.

   Def. Eine Lie-Algebra $(V, [\cdot,\cdot])$ ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ mit folgenden Eingenschaften:

   (a) $[X,Y] = -[Y,X], \;\; X, Y \in V$
   (b) Jacobi-Identität: $X, Y, Z \in V$:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

   Beispiele:

   (a) $\Gamma(TM)$, $[\cdot,\cdot]$ ist eine Lie-Algebra
   (b) $\mathbb{M}_u(\mathbb{R})$, $[A,B] = AB - BA$ ist eine Lie-Algebra

   Verbindung zwischen a) und b) – Lie-Gruppen Lie-Gruppe = Mannigfaltigkeit und Gruppe (auf kompatible Weise) Multiplikation, Inversion glatt.

   G Lie-Gruppe $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Lie}(G) = 2(G) = \{X \in \Gamma(TG) \mid \underbrace{(Lg)_*}_{(Lg)_{*,p} = D_pLg} X = X\} =$

   $\{x \mid x$ linksinvariantes Vektorfeld $\}$

   $\to$ Lie-Algebra bzgl. $[\cdot,\cdot]$, heißt Lie-Algebra von G.

   Eigenschaften: $\mathrm{Lie}(G) \cong T_1G$ als Vektoraum $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G) = \dim G$

$$\begin{aligned} Lg \colon G &\to G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

   Satz

$$G = GL(n,\mathbb{R}) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathrm{Lie}(G) \cong T_1G \underset{\text{Vektoraum}}{\cong} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

   Dies ist auch ein Isomorphismus zwischen Lie-Algebren!

$$(\mathrm{Lie}(\mathrm{GL(n,\mathbb{R})}), [\cdot,\cdot]) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$$

   Für jedes $G < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist dann $\mathrm{Lie}(G) \subseteq (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$.

$$[A,B] = AB - BA$$

Übung 1

Differential einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{rrcl} p \in \mathbb{R}^n & D_p f\colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m (\text{linear}) \\ & v & \mapsto & \underbrace{\partial_v f(p)}_{=D_p f(v)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \partial_v f(p) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p v^i \\ D_p f & \underset{\text{als Matrix}}{=} & \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \end{array}$$

$$f\colon M \to N$$

$$\begin{array}{rll} p \in M \rightsquigarrow D_p f\colon & T_pM & \to T_{f(p)}N \text{ linear} \\ & \Cup & \\ & v & \mapsto (\underbrace{\varphi}_{C^\infty} \mapsto v(f^*\varphi)) = v(\underbrace{\phi \circ f}_{\in C^\infty(M)}) \end{array}$$

$v \mathrel{\hat{=}}$ Ableitungsoperation ($v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$) mit $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^*\varphi"'] & N \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

TODO

TODO Bildchen TODO

$$\begin{array}{rcl} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \rightsquigarrow & \\ C^\infty(N) & \xrightarrow{f^*} & C^\infty(M) \text{ linear, sogar Algebrenhomomorphismus}\mathit{TODO} \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Jeder Tangentialvektor v ist eine lineare Abbildung $v\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, dann ist

$$\underbrace{v \circ f^*}_{=D_{\pi(v)}f(v)=f_*v} \quad : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

linear

Beispiel

$$G = U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* A = 1\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$$\begin{array}{ccl} & \mathrm{Lie}(G) & = \mathrm{og} = \underline{u}(n) = ? = \{X \in \mathbb{M}_n(C) \mid X^* = -X\},\ [\cdot,\cdot] \\ & \cong & \\ & T_1 G & \subset T_1 \,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\ & \| & \\ \{ & \dot\gamma(0) & \mid \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G \wedge \gamma(0) = 1\} \end{array}$$

Sei $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to G$ eine Kurve, $\gamma(0) = 1$

$G = U(n) \Rightarrow \gamma(t)^* \cdot \gamma(t) = 1 \leftarrow \frac{d}{dt}\big|_{t=0}$

$$\begin{array}{ccc} \dot\gamma(0)^*\gamma(0) & + & \gamma(0)^*\dot\gamma(0) = 0 \\ & \| & \\ \dot\gamma(0)^* & + & \dot\gamma(0) = 0 \end{array}$$

Also:

$$T_1(G) \subseteq \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

Dazu: Zeige $\supseteq$ betrachte:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= e^{tX} \left(:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \right) \\ \gamma(t)^* &= e^{tX^*} = e^{-tX} \\ \gamma(t) * \gamma(t) = e^{-tX} \cdot e^{tX} &= 1 \Rightarrow \gamma(t) \in \mathrm{U}(n) \\ \dot\gamma(t) &= X e^{tX} \Rightarrow \dot\gamma(0) = X \end{aligned}$$

wie gewünscht. $\Rightarrow$ Gleichheit

$$D_1 \det = (A \mapsto \mathrm{Trace}(A))$$

$$G = U(n) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\, \mathrm{og} = \underline{u}(n) \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Wir haben gesehen:

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon & \mathrm{og} & \to G \\ & \cup & \\ & X & \mapsto \exp(X) \end{array}$$

$$\gamma(t) = e^{tX} = \exp(tX)$$

$$\dot\gamma(t) = X e^{tX} = e^{tX} \cdot X = \gamma(t) \cdot X = \left(L_{\gamma(t)}\right)_* \underbrace{X}_{\in T_1 G} = \tilde{X}(\gamma(t))$$

wobei $\tilde{X}$ das linksinvariante Vektorfeld zu X ist

$\Rightarrow \gamma(t)$ ist eine Integralkurve von $\tilde{X}$

Ausführlicher:

$G \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$$X \in T_1 G \rightsquigarrow \underbrace{\tilde{X}(A)}_{\text{linksinvariantes VF}} = \underbrace{A}_{\in G} \cdot X \in T_A G \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Eine Integralkurve $A(t) \in G$ von $\tilde{X}$ erfüllt dann:

$$\dot{A}(t) = A(t) \cdot X$$

$\rightsquigarrow$ mit $A(0) = 1 \rightsquigarrow A(t) = e^{tX}$

TODO

$$\begin{aligned} x &\mapsto A \cdot x \\ f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \text{ linear} \\ \Rightarrow D_p f = f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

$$f\colon V \to W \text{ linear}$$

mit Übung 28 TODO$p \in V$:

$$\begin{array}{ccc} T_p V & \xrightarrow{D_p f} & T_p W \\ \cong & & \cong \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

TODOTODO

$$\det \gamma(t) = 1 \leftarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\det\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} D_1 \det\colon \mathbb{M}_n(R) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto ? = \mathrm{Tr}(A) \end{aligned}$$

$$\det(1 + tA) = 1 + (?) + O(t^2)$$

Determinante ist Konjugationsinvariant

$$\det(1 + tA) = \det(1 + tBAB^{-1})$$

Wenn A diagonalisierbar ist folgt somit:

$$\begin{aligned}
\det(1+tA) &= \begin{vmatrix} 1+t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+t\lambda_n \end{vmatrix} \\
&= (1+t\lambda_1)\cdots(1+t\lambda_n) \\
&= 1+t(\lambda_1+\lambda_n)+O(t^2) \\
&= 1+t\cdot\operatorname{Trace}(A)+O(t^2)
\end{aligned}$$

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Suchen eines koordinateninvarianten Integrationsbegriffs

TODO

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "\alpha\colon U \xrightarrow{\cong} V \text{ Diffeo}"] & \mathbb{R}^n \\
V & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Betrachte $n = 1$:

U, $V \subseteq \mathbb{R}$ offenen Intervalle. $\alpha\colon \underbrace{U}_{=(a,b)} \to V$ Diffeo (= strikt monotone glatte Fkt.)

Transformationsformel:

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

„Mnemonik“:

$$\mathrm{d}v = v'(u)\,\mathrm{d}u$$

$f\colon V \to \mathbb{R}$

$$\int_U (\alpha^*(f))(u)\alpha'(u)\,\mathrm{d}u = \int_V f(v)\,\mathrm{d}v \neq \int_V \alpha^*(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

In $\mathbb{R}^n$:

$$\int_U \alpha^*(t)(\det D_u\alpha)\,\mathrm{d}_{u_1}\cdots\mathrm{d}_{u_n} = \int_V f(v)\,\mathrm{d}_{v_1}\cdots\mathrm{d}_{v_n}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\colon \quad U &\to V \text{ Diffeo} \\
(u_1,\dots,u_n) &\mapsto (v_1,\dots,v_n)
\end{aligned}$$

$v = v(u)$

$$\int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2$$

$$\mathrm{d}v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_1} + \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_2} + \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_1 =: (*)$$

$$= \int_V f(v)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 = \int_U f(v(u)) \left(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}}_{\underset{\substack{\text{sollte}\\ (*)\text{ sein}}}{=} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\end{pmatrix}} \right) \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2$$

Damit die Mnemonik stimmt, muss also gelten:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_1 &= \mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_2 = 0 \\ \mathrm{d}u_1 \cdot \mathrm{d}u_2 &= -\,\mathrm{d}u_2 \cdot \mathrm{d}u_1 = 0 \end{aligned}$$

Erkenntniss:

Koordinatenfrei werden nicht Funktionen, sondern sogenannte Differentialformen integriert. Eine n-Differentialform auf $\mathbb{R}^n$ ist (informell) ein Ausdruck

$$\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

mit den Rechenregeln: wenn $x = x(y)$ mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dann transformiert sich der Ausdruck zu

$$f(x(y)) \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\,\mathrm{d}y_n \right)$$

und es gilt:

$$T^*M \ni \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}y_j = -\,\mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}y_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

folglich ist $\int \omega$ unabhängig von Koordinaten.

Ziel:

Das Tensorprodukt

ausgehend von einem Vektoraum $V(= T_pM, T_p^*M)$ einen Kalkühl zu entwickeln, welcher die Interpretation von Ausdrücken wie $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ mit Rechenregeln $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ erlaubt.

Das wird durch Theorie von Tensorprodukten und multiliniearen (z.B. $\det\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$) Abbildungen gemacht

Hauptidee: eine multilinieare Abbildung $f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$. Es reicht diese Idee für bilineare Abbildungen zu realisieren. (dann wiederholt man es)

Definition: Tensorprodukt

Ein Vektoraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $i\colon V \times W \to V \otimes W$ heißt Tensorprodukt von V und W, wenn für jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \to Z$, (Z beliebiger Vektoraum) eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{f}\colon V \otimes W \to Z$ existiert mit $\bar{f} \circ i = f$ (genannt universelle Eigenschaften)

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Lemma: Eindeutigkeit des Tensorprodukts $V \otimes W$

Wenn $V \otimes W$ existiert, dann ist es eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & (V \otimes W)_1 \arrow[d, dashed, "\exists! f_1"] \\ & (V \otimes W)_2 \arrow[u, dashed, bend right=60, "\exists! f_2"'] \end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_1$ liefert $f_1\colon (V \otimes W)_1 \to (V \otimes W)_2$ mit $f_1 \circ i_1 = i_2$.

Die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W)_2$ liefert $f_2\colon (V \otimes W)_2 \to (V \otimes W)_1$ mit $f_2 \circ i_2 = i_1$.

Beh. f_1, f_2 sind invers zueinander. Betrachte:

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & (V \otimes W)_2 \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & (V \otimes W)_2 \end{tikzcd}$$

$f_2 \circ f_1$ und id erfüllen beide die geforderte Eigenschaft an $\bar{f}$:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1) \circ i_1 &= i_1 \\ \mathrm{id} \circ i_1 &= i_1 \end{aligned}$$

Da es aber nur eine solche Funktion gibt, müssen sie gleich sein:

$$f_2 \circ f_1 = \bar{f} = \mathrm{id}$$

Also $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{(V \otimes W)_2}$ und analog gilt $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{(V \circ W)_1}$. Also ist f_1 ein Isomorphismus.

Existenz von $V \otimes W$

Idee: $V \otimes W$ soll von Ausdrücken der Form $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$ aufgespannt werden und $v \otimes w$ soll linear in V und W sein.

Definition: Sei X eine Menge. Der freie (reelle) Vektoraum auf X, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$, ist der (bis auf Isomorphie eindeutige) (reelle) Vektoraum mit Basis X (ohne Beweis). Er ist isomorph zum Raum der formalen Linearkombination von X:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X) &\cong \{f \colon X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in X\} \\
x &\mapsto \mathbb{1}_x \\
\mathbb{1}_x &= x \mapsto \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}
\end{aligned}$$

Definiere:

$$\begin{aligned}
V \otimes W &:= \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(V \times W) / \underbrace{\left\langle \left\{ \begin{array}{l|l} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w), & v_1,v_2,v \in V, \\ (v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2), & w_1,w_2,w \in W, \\ (\lambda v,w)-\lambda(v,w), & \lambda \in \mathbb{R} \\ (v,\lambda w)-\lambda(v,w) & \end{array} \right\} \right\rangle}_{:=\langle \dots \rangle} \\
&= \{f + \langle \dots \rangle \; TODO \mid f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(V \times W)\}
\end{aligned}$$

$$\langle \cdot \rangle = \mathrm{span}(\cdot), \quad \mathbb{1} = \text{Indikatorfunktion}$$

Sei

$$\begin{aligned}
i \colon \quad V \times W &\to V \otimes W \\
(v, w) &\mapsto [(v, w)] =: v \otimes w
\end{aligned}$$

Diese Definition heißt, dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\
v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\
\lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}
v_1 \otimes w + v_2 \otimes w &= [(v_1, w)] + [(v_2, w)] \\
&= (v_1, w) + \langle \dots \rangle + (v_2, w) + \langle \dots \rangle \\
&= (v_1, w) + (v_2, w) + \langle \dots \rangle \\
&\overset{\langle \dots \rangle \text{ ist UV}}{=} (v_1, w) + (v_2, w) + (\; ((v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)) + \langle \dots \rangle \;) \\
&= (v_1 + v_2, w) + \langle \dots \rangle \\
&= [(v_1 + v_2, w)] \\
&= (v_1 + v_2) \otimes w
\end{aligned}$$

wenn E ein Vektoraum ist, $E' \subseteq E$ Untervektorraum, dann ist $E/E' = \{e + E' \mid e \in E\}$ mit mengenmäßiger Addition und Skalarmultiplikation. (bei uns ist $E = \mathcal{F}(V \times W)$, $E' = \langle \ldots \rangle$)

Interpretation: E/E' = Vektoraum der Äquivalenzklassen von Vektoraum in E modulo E'. ($e' = 0$, $e' \in E'$) TODO Entsprechend ist

$$\begin{aligned}
V \otimes W &= \{f + \langle \ldots \rangle \mid f \in \mathcal{F}(V \times W)\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathbb{1}(v,w)_i + \langle \ldots \rangle \; TODO \mid (v,w)_i \in V \times W, \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,\ldots,n\}, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \operatorname{span}\{\mathbb{1}_{(v,w)} + \langle \ldots \rangle \mid (v,w) \in V \times W\} \\
&= \operatorname{span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}
\end{aligned}$$

mit den Relationen:

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\
v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\
\lambda(v \otimes w) &= v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w, \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Lemma

Die angegebene Konstruktion von $V \otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Beweis:

Sei $f \colon V \times W \to Z$ gegeben, bilinear

Definiere

$$\begin{aligned}
\hat{f} \colon V \times W &\to Z, \quad \text{linear} \\
\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (v_i, w_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i, w_i)
\end{aligned}$$

Behauptung: $\hat{f}$ induziert eine lineare Abbildung $\bar{f}$

$$\begin{aligned}
\bar{f} \colon V \otimes W &\to Z \\
(v \otimes w) &\mapsto \hat{f}((v,w)) \\
\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{(v,w)_i} \right) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left((v,w)_i\right)
\end{aligned}$$

Dazu muss man überprüfen, dass $(v_1 + v_2, w) - (v, w) - (v_2, w)$ sowie andere Relationen von irgendwas oben TODOim Kern von $\hat{f}$ liegen. Das ist dadurch gewährleistet, dass f bilinear ist, z.B.

$$\begin{aligned}
& \bar{f}(\mathbb{1}_{(v_1+v_2,w)} - \mathbb{1}_{(v_1,w)} - \mathbb{1}_{(v_2,w)}) \\
= \; & \hat{f}((v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)) \\
\overset{\text{Def. } \hat{f}}{=} \; & f(v_1 + v_2, w) - f(v_1, w) - f(v_2, w) \\
\overset{\text{Bilinearität von } f}{=} \; & 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{f}$ erfüllt dann $\bar{f}(v \otimes w) = f(v,w) \Rightarrow V \otimes W$ erfüllt die universelle Eigenschaft.

Homomorphismen und Dualräume: (Erinnerung aus LAAG)

V, W Vektorräume $\rightsquigarrow Hom(V,W) = \{f\colon V \to W \mid f \text{ linear }\}$ ist selbst ein Vektoraum, wenn V, W endlichdimensional $\Rightarrow \dim \operatorname{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$ $(\operatorname{Hom}(V,W) \cong \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$, wenn $V \cong \mathbb{R}^n$, $W \cong \mathbb{R}^m)$

$V^* := \operatorname{Hom}(V,\mathbb{R})$ ist dann der Dualraum von V. Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V ist, dann gibt es die duale Basis $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset V^*$ mit: $\alpha_j(e_i) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Schließlich ist für V $< \infty$ die Einbettung $i\colon V \to V^{**}$, $v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v))$ ein Isomorphismus

Proposition

$W \otimes V^*$ ist kanonisch isomorph zu $\operatorname{Hom}(V,W)$ für endlichdimensionale V, W. Insbesondere gilt dann:

$$\dim W \otimes V^* = \dim W \cdot \dim V = \dim W \otimes V$$

Mehr: wenn $\{f_j\}_{j=1}^m$ und $\{e_i\}_{i=1}^n$ Basen in W bzw. V sind. Dann ist $\{f_j \otimes e_i\}_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ eine Basis in $W \otimes V$

Beweis:

Sei $L\colon W \times V^* \to \operatorname{Hom}(V,W)$, $(w,\alpha) \mapsto (\theta_{w,\alpha}\colon v \mapsto \alpha(v) \cdot w)$, ($\theta_{w,\alpha}$ Rang 1-Operator definiert durch α, w)

L ist bilinear, weil:

$$\begin{aligned} & (L(w_1 + \lambda w_2, \alpha_1 + \mu\alpha_2))(v) \\ = \; & (\alpha_1 + \mu\alpha_2)(v) \cdot (w_1 + \lambda w_2) \\ = \; & \underbrace{\alpha_1(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_1)(v)} + \underbrace{\mu\alpha_2(v)w_1}_{L(w_1,\alpha_2)(v)} + \lambda \underbrace{\alpha_1(v)w_2}_{L(w_2,\alpha_1)(v)} + \mu\lambda \underbrace{\alpha_2(v) \cdot w_2}_{L(w_2,\alpha_2)(v)} \end{aligned}$$

Nach der universellen Eigenschaft vom Tensorprodukt bekommen wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{L}\colon W \otimes V^* &\to \operatorname{Hom}(V,W) \\ w \otimes \alpha &\mapsto \theta_{w,\alpha} \end{aligned}$$

$\bar{L}$ ist ein Isomorphismus: geben wir das Inverse an. Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis on V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ die duale Basis in V^*. Definiere

$$\begin{aligned} \varphi\colon \operatorname{Hom}(V,W) &\to W \otimes V^* \\ T &\mapsto \sum_{i=1}^n T(e_i) \otimes \alpha_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \bar{L}(w \otimes \alpha) &= \varphi(\theta_{w,\alpha}) \\
&= \sum_{w,\alpha} (e_i) \otimes \alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i) w \otimes \alpha_i \\
&= w \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i) \cdot \alpha_i \right) \\
&= w \otimes \alpha \\
&\Rightarrow \varphi \circ \bar{L} = \mathrm{id}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{L} \circ \varphi(T)(v)) &= \sum_{i=1}^{n} \theta_{T(e_i),\alpha_i}(v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) T(e_i) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) e_i \right) \\
&= T(v) \\
&\Rightarrow \bar{L} \circ \varphi = \mathrm{id}
\end{aligned}$$

$W \otimes W$ ist nach Konstruktion aufgespannt durch $f_j \otimes e_i$, $\dim W \otimes V = \dim W \cdot \dim V \Rightarrow \{f_j \otimes e_i\}$ ist eine Basis.

Korollar

Wenn X, Y endliche Mengen sind, dann gilt:

$$\mathcal{F}(X \times Y) \cong \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$$

Erinnerung: hier gilt $\mathcal{F}(X) = \{f \colon X \to \mathbb{R}\}$ mit punktweisen Operationen

Korollar

$W \otimes V \cong V \otimes W$, $W \otimes (V \otimes Z) = (W \otimes V) \otimes Z$

Bemerkung: Es gilt auch ohne Einschränkung auf Dimensionen

Definition Tensor

Ein Tensor vom Typ (r, s) (zum Vektoraum V) ist ein Element des Vektoraumes

$$T_{r,s}(V) := V \underbrace{\otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

Bemerkung: Wenn $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis in V, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset V^*$ duale Basis. $\rightsquigarrow$

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_r} \mid i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}\}$$

ist eine Basis in $T_{r,s}$ (Beweis: wende induktiv die Proposition an).

$\Rightarrow$ jedes $T \in T_{r,s}(V)$ ist darstellbar also

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,n\}} T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} (e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_s})$$

Beispiel $T_{1,1}(V) = V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V,V) = \mathrm{End}(V)$ d.h., elemente von $T_{1,1}$ kann man als lineare Abbildung von V nach V interpretieren. Multilinear heißt linear in jeder Komponente. Sei

$$M_{s,r}(V) := \{f \colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ multiliniear } \}$$

Proposition

$T_{r,s}(V)$ ist kanonisch isomorph zu $M_{s,r}(V)$

Korollar

$$\mathrm{Bil}(V) = \{b \colon V \times V \to \mathbb{R} \text{ biliniear}\} \cong V^* \otimes V^*$$

Insbesondere ist ein Skalarpodukt auf V ein Tensor vom Typ $(0,2)$ Notation $g_{i,j}$ für Koordinaten einer Metrik ist konstant mit Tensorprodukten.

Tensorprodukte von Vektorräumen

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(V \otimes \underbrace{W}_{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{Bil}(V \times W, \underbrace{Z}_{\mathbb{R}}) \\ \overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} \quad &\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, Z) \cong \{f \colon V_1 \times \ldots \otimes V_n \to Z \mid f \text{ multiliniear } \} \end{aligned}$$

Letzes mal:

$$T_{r,s}(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s\text{-mal}}$$

$$M_{s,r} := \{f \colon \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R} \mid f \text{ multiliniear } \}$$

Proposition

TODO

$$T_{r,s}(V) \overset{kan.}{\cong} M_{s,r}(V)$$

Beweis:

Nach obigen Eigenschaften gilt:

$$\begin{aligned} M_{s,r} &\cong \operatorname{Hom}(T_{s,r}(V),\mathbb{R}) \cong t_{s,r}(V)^* = (V^* \otimes \ldots \otimes V^* \otimes V \otimes \ldots \otimes V)^* \\ &\overset{?}{\cong} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}} \end{aligned}$$

Wir wollen also zeigen: W, Z zwei Vektoräume, wollen zeigen, dass $W^* \cong Z$ $(W = T_{s,r}(V),\ Z = T_{r,s}(V))$

Def./Erinnerung:

Eine nichtsinguläre Paarung zwischen W, Z ist eine bilineare Abbildung $\beta\colon W \times Z \to \mathbb{R}$ mit

- $\beta(W,Z) = 0\ \forall Z \in Z \Rightarrow w = 0$
- $\beta(W,Z) = 0\ \forall w \in W \Rightarrow Z = 0$

Übung:

Wenn W, Z endlichdimensional, $(w_i)_{i=1}^n$, $(z_i)_{i=1}^m$ Basen in W bzw. Z dann ist β nichtsingulär $\Leftrightarrow (\beta(w_i, z_j))_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}}$ nicht ausgeartet ist $\Rightarrow n = m$

β gibt einen Isomorphismus $\hat{\beta}\colon Z \to W^*$

Beispiel:

$W = Z$, euklidischer Raum mit Skalarpodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$\beta(W,Z) = \langle\cdot,\cdot\rangle$$

Alos: Wir betrachten eine nichtsinguläre Paarung

$$\beta_i\colon T_{s,r}(V) \times T_{r,s}(V) \to \mathbb{R}$$

Definiere

$$\begin{aligned} &\beta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_s \otimes v_1^* \otimes \ldots \otimes v_r^*, v_1 \otimes \ldots \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes \ldots \otimes u_s^*) \\ = \;&\Pi_{i=1}^r v_i^*(u_i) \cdot \Pi_{j=1}^s u_j^*(v_j)_s \text{ bilinear fortgesetzt} \end{aligned}$$

Tensorprodukte von Vektorräumen

Zu zeigen ist, dass β nicht ausgeartet ist. Dazu sei $0 \neq t \in T_{r,s}(V)$, wir suchen $t^* \in T_{s,r}(V)$ mit $\beta(t^*, t) \neq 0$

Sei $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis in V, $(\alpha)_{j=1}^n$ die Dualbasis in V^*

Dann gilt:

$$t = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\}\\ j_1,\ldots j_s \in \{1,\ldots,n\}}} t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{j_s}$$

$D_a t \neq 0$, ist eins von den Koeffizienten $\neq 0$:

$$0 \neq t^{i_1\cdot i_r}_{j_1\cdots j_s} = \beta(\alpha_{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_s}, t)$$

Bemerkung: Die Paarung zwischen $T_{r,s}$ mal $T_{s,r}$ wird gelegentlich einfach durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oder $(\cdot,\cdot)$ bezeichnet.

Beispiel $V = T_pM$, (U,x) eine Karte um p, dann hat $V = T_pM$ eine Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$

$V^* = T_p^*M$ bekommt die duale Basis $\{\mathrm{d}x^i\}_{i=1}^n$

Erinnerung: $\mathrm{d}x^i(\underbrace{T_pM}(v) := v(x^i))$, daher $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_{ij}$

TODOWir bekommen jetzt z.B. (i,j fest)

1. $t_{ij} = \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \in V^* \otimes V^* = T_{0,2}(V) \cong T_{0,2}(V) \cong \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} t_{ij} &= (\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j)(v,w) \\ &= \mathrm{d}x^i(v) \cdot \mathrm{d}x^j(w) \\ &= v(x^i) \cdot w(x^j),\ v,w \in T_pM \end{aligned}$$

Beispiel:

$$g := \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$$

ist auch eine Biliniarform auf T_pM. Wenn $M = \mathbb{R}^n$, p beliebig, dann ist g das Standardskalarprodukt auf $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)}_{=\delta_{il}} \\ &= \delta_{kl} + \delta_{lk} \\ &= \delta_{kl} \end{aligned}$$

Äußere Potenzen, äußere Algebra

Errinnerung:

für Integrationstheorie wollen wir die Rechenregeln

$$d_x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

Beobachtung: Tensoren kann man miteinander multiplizieren. Es gibt eine kanonische bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} (\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k\text{-mal}}) \times \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{l\text{-mal}} &\to \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{(k+l)\text{-mal}} \\ ((v_1 \otimes \ldots \otimes v_k), (v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_{k+l})) &\mapsto (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k+l}) \end{aligned}$$

Notation:

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k\text{-mal}} & k > 0 \\ \mathbb{R} & k = 0 \end{cases}$$

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

heißt die Tensoralgebra von V

Multiplikation: $t \in V^{\otimes r}$, $t' \in V^{\otimes s}$

$$t \cdot t' := t \otimes t' \in V^{\otimes (r+s)}$$

definiert eine Multiplikation auf $T(V)$

In $T(V)$ gelten die Relationen $v \otimes v = 0$ nicht.

Diese wollen wir erzwingen.

Sei $Z(V) = \langle v \otimes v | v \in V \rangle$ das Ideal in $T(V)$ erzeugt von Elementen der Form $v \otimes v$

Notation:

$$I_r(V) := I(V) \cap V^{\otimes r}, I(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} I_n(V) \text{ (kleine Übung)}$$

Multiplikation wird durch $\bigwedge$ bezeichnet. nach Konstruktion gilt $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = [v_1 \otimes \ldots \otimes v_k]$

Definition

$$\bigwedge(V) := T(V)/I(V)$$

heißt äußere Algebra von V

Nach Konstruktion und Eigenschaft von $I(V)$ gilt

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \underbrace{\bigwedge^{r}(V)}_{V^{op?}/I_r(V}$$

1. $\wedge^0 V \cong \mathbb{R}$, weil $I_0(V) = \{0\}$
2. $\wedge^1 V \cong V$, weil $I_1(V) = \{0\}$

Proposition

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis in V. Dann ist

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid k \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

eine Basis von $\bigwedge^k(V)$ ($\leftarrow$ k-te äußere Potenz)

Insbesondere gilt:

$$\bigwedge^{k}(V) = \binom{n}{k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \wedge_k(V) = \{0\}, \quad k > n$$

Äußere Potenzen, äußere Algebra

Beweis

Nach Konstruktion gilt: $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, daher spannt

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_k \leqslant n\}$$

den Raum $\bigwedge^k V$. Wir brauchen also zu zeigen, dass

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = 0$$

Sei $I = (i_1, \ldots, i_k)$ $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ fixiert.

Sei $J = \{1, \ldots n\} \setminus I = (j_1, \ldots, j_{n-k})$ $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$

Betrachte das Element $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ und multipliziere es an $(*)$:

$$\pm \alpha_{i_1, \ldots, i_k} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 0$$

Alle anderen Terme verschwinden, weil eine Vektor im Produkt doppelt vorkommt.

Gestern:

$$\bigwedge(V) = T(V)/I(V)$$

$I(V) = \langle v \otimes v \mid v \in V \rangle$ Ideal erzeugt durch $v \otimes v$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i \otimes v_i \otimes v_i z_i \;\middle|\; t_i, t_i' \in T(V), v_i \in V \right\}$$

$$[\underbrace{v_1 \otimes \ldots \otimes v_n}_{\in T(V)}] =: i v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \bigwedge(V)$$

nach Konstruktion gilt $v \wedge v = 0$, $v' \in V$ (daraus folgt: $v \wedge w = -w \wedge w$, v, $w \in V$, $0 = (v+w) \wedge (v+w) = \underbrace{v \wedge v}_{=0} + v \wedge w + w \wedge v + \underbrace{w \wedge w}_{=0} = v \wedge w + w \wedge v$)

Das Bild von $V^{\otimes k}$ in $\bigwedge(V)$ heißt $\bigwedge^k(V)$ – die Elemente der Länge k,

$$\bigwedge^k(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} \middle| v_{i_l} \in V \right\}$$

Proposition

Wenn $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis von V ist, ist $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant u\}$ eine Basis von $\bigwedge^k(V)$; insbesondere $\dim \bigwedge_k(V) = \binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ für $k > n$

Beweis:

Wir haben die Aussage darauf reduziert, dass in $\bigwedge_k(V)$ $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0 \longrightarrow$ Reduktion für $k = 2$, $n = 4$. wird behauptet, dass $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$ linear unabhängig sind. Wenn nicht $\exists \alpha_{ij}$:

$$\alpha_{12} e_1 \wedge e_2 + \alpha_{13} e_1 \wedge e_j + \alpha_{14} e_1 \wedge e_4 + \ldots = 0$$

$\rightarrow \alpha_{13} e_1 e_3 \wedge e_2 \wedge e_4 = 0 = -\alpha_{13}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0 \Leftrightarrow e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \notin I(V)$$

Wenn

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \\ v \otimes v &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j e_i \otimes e_j \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 e_i \otimes e_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<y}}^n \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) \end{aligned}$$

Sei $x \in I_n(V) = I(V) \cap V^{\mathrm{op}}$. Aus der obigen Rechnung folgt: Wenn man x in der Tensorbasis ausdrückt.

$$x = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant n} x^{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$$

dann gilt: wenn alle i_j's verschieden sind, so gilt

$$x^{i_1, \ldots, i_j, i_{j+1}, \ldots, l_n} = x^{i_1, \ldots, i_{j+1}, i_j, \ldots, i_n}$$

Bei $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ ist der Koeffizient $x^{1,2,\ldots,n} = 1$ alle anderen $0 \Rightarrow e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \notin I_n(V)$

Bemerkung:

Jede lineare Abbildung $f \colon V \to V$ induziert eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \bigwedge f \colon \bigwedge V &\rightarrow \bigwedge V \\ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) &\mapsto (f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_k)) \end{aligned}$$

Insbesondere bekommt man die Abbildung ($\dim V = n$) $\bigwedge_n f\colon \underbrace{\bigwedge^n V}_{\cong R} \xrightarrow{\det f} \underbrace{\bigwedge^n V}_{\cong R}$

$$\begin{aligned} \bigwedge(g \circ f) = \bigwedge g \circ \bigwedge f \quad \Rightarrow \quad & \det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f) \\ & \det(\mathrm{id}) = 1 \end{aligned}$$

Die explizite Formel ergibt sich daraus, dass $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ ein Basisvektor in $\bigwedge^n V$ ist. $\rightsquigarrow$

$f(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = f(e_1) \wedge \ldots \wedge f(e_n) = \ldots$ (Leibnitz-Formel) $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$

$[f_{ij}] = M_\xi^\xi(f)$

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} e_j$$

$$\begin{aligned} f(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) &= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^n f_{1,j_1} \cdots f_{n,j_n} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n} \\ &= \sum_{j=(j_1,\ldots,j_1) \in S_n} f_{1,j_1} \cdots f_{n,j_n} \operatorname{sign}(j) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \end{aligned}$$

Letzes Mal:

Tensoren vom Typ (n,s) $\hat{=}\, T_{r,s}(V) \cong M_{s,r}(V) \,\hat{=}$ lineare Abbildungen $V^{\otimes s} \otimes (V^*)^{\otimes r} \to \mathbb{R}$

Nächstes Ziel:

Interpretiere $\bigwedge^k V^*$ als gewisse multiliniear Abbildung $V^k \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \bigwedge^k V^* &= (V^*)^{\otimes k} / I_k(V^*) \\ (V^*)^{\otimes k} &= \{ f\colon V^k \to \mathbb{R} \mid f \text{ multilinieare Abbildung } \} \end{aligned}$$

$$I_k(V^*) = I(V^*) \wedge (V^*)^{\otimes k}$$

$I(V^*) = \{ \sum t \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes t' \}$, erzeugt durch $\{ \alpha \otimes \alpha \mid \alpha \in V^* \}$

$$(\alpha \otimes \alpha)(v_1 \otimes v_2) = \alpha(v_1)\alpha(v_2) = (\alpha \otimes \alpha)(v_2, v_1)$$

Definition

Eine multiliniear Abbildung $m\colon \underbrace{V^k}_{=V \times \ldots \times V} \to \mathbb{R}$ ($= m\colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R}$) heißt alternierend, wenn

$$m(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = 0 \text{ für alle } v \in V$$

$\Leftrightarrow$ m verschwindet, wenn zwei (beliebige) V gerade gleich sind)

Beispiel

$\det(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ ist eine alternierende Abbildung. Wenn $m\colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R}$ alternierend, dann gilt

$$m|_{I_k(V)} = 0$$

(nach Definition von $I_k(V)$)

$\longrightarrow m$ definiert eine Abbildung

TODO

$$\begin{aligned} \overline{m}\colon \bigwedge^k V &\to \mathbb{R} \\ [v_1 \wedge \ldots \wedge v_n] &\mapsto m(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \end{aligned}$$

Proposition

$$\bigwedge^k V^* \cong \left(\bigwedge^k V\right)^* \cong A_k(V) = \{m\colon V^k \to \mathbb{R} \text{ alternierend }\}$$

Beweis:

Wie gerade gesehen, definiert jedes $m \in A_k \in (V)$ ein Element $\overline{m} \in \left(\bigwedge^k\right)^*$, $m \mapsto \overline{m}$ ist offensichtlich linear. Umgekehrt: jedes $\overline{m}\colon \bigwedge^k V \to \mathbb{R}$ definiert eine multilinieare Abbildung

$$\begin{aligned} m\colon V \times \ldots \times V &\to \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto \overline{m}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \end{aligned}$$

sie ist alternierend, weil

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v \wedge \ldots \wedge v \wedge \ldots \wedge v_k = 0$$

Zum Iso TODO$\bigwedge^k V^* \cong (\bigwedge^k V)^*$: wir brauchen eine nichtsinguläre bilineare Paarung $\bigwedge^k V^* \times \bigwedge^k V \to \mathbb{R}$ (die für $K = 1$ offensichtlich ist)

$$V^* \times V \to \mathbb{R}(\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$$

Man definiert die Paarung so:

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \mapsto \det(\alpha_i(v_j))_{i,j=1}^k$$

Die Paarung ist nicht ausgeartet, denn: in $\bigwedge^k V$ haben wir nach der Wahl einer Basis $e_1, \ldots, e_n \in V$ die Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid (1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)\}(*)$$

Wenn $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V$ dual zu $e_1, \ldots, e_n$, dann ist

$$\{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

dual zu $(*)$ bezüglich der Paarung:

$$(e_i^*(e_j))_{i,j=1}^k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

wenn aber $(i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots j_k)$, dann ist

$$(e_{il}^*(e_{jl})) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = 0$

TODO

Bemerkung

Unter der Identifikation aus der Proposition bekommen wir die Rechenregeln

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\alpha_i(v_j))_{i,j=1}^k$$

Insbesondere gilt für $k = 2$:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_1(v_2)\alpha_2(v_1)$$

TODO

Differentialformen

$$\begin{array}{ccc} TM & & T^*M \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & & M \\ | & & | \\ \text{Tangentialbündel} & & \text{Kotangentialbüdel} \end{array}$$

Geometrisch: über jedem Punkt p hängt T_pM tzw, T_p^*M und

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM, \quad T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$$

Idee

man macht punktweise Konstruktion wie Tensorprodukt, äußere Potenzen etc. mit T_pM bzw. T_p^*M und bekommt „Bündel“, die ähnlich wie TM/T^*M angegeben, aber etwas kompliziert sind

Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein k-dimensionales Vektorbündel E über M ist eine Mannigfaltigkeit E zusammen mit einer glatten Abbildung $\pi\colon E \to M$ (π heißt Bündelprojektion) mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\forall p \in M$ ist $E_p := \pi^{-1}p$ ein (R)-Vektoraum von k.
- (2) [lokale Trivialität] $\forall p \in M \exists U \ni p$ offen mit

  $$E|_U := \pi^{-1}(U) \overset{\overset{\psi}{\cong}}{\xrightarrow{\text{diffeomorph}}} U \times \mathbb{R}^k$$

  sodass $\forall q \in U$, $\forall v_1$, $v_2 \in E_q = \pi^{-1}(q)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: ($\pi^{??}_{??}\mathbb{R}^k\colon U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ Projektion)TODO

  $$\pi_{\mathbb{R}^k} \circ \psi(v_1 + \lambda v_2) = \pi^{??}_{??}\mathbb{R}^k \circ \psi(v_1) + \lambda \cdot \pi_{\mathbb{R}^k} \circ \psi(v_2)$$

  (die Vektorraumoperation auf E_q entsprechen den auf $\mathbb{R}^k$ durch ψ)

Bemerkung

Über jeder Mannigfaltigkeit existiert das triviale Vektorbündel der Dimension k:

$$E := \underbrace{M \times \mathbb{R}^k}_{=\mathbb{R}^k} \xrightarrow{\pi} M$$

Die Bedingung (2) verlangt gerade dass ein Vektorbündel E lokal (d.h. über U) trivial sein muss (= isomorph zum trivialen Bündel)

Beispiel

TM, T_pM sind Vektorbündel über M. Eig. (2) kamen von dem Beweis, dass TM, T^*M Mannigfaltigkeiten sind.

Erinnerung

Wenn V ein Vektorraum ist,

$$T_{r,s}(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

VR von Tensor von Typ (r, s)

Definiere jetzt

$$T_{r,s}(\underbrace{M}_{\text{Mannigfaltigkeit}}) = \bigsqcup_{p\in M} T_{r,s}(T_pM)$$

$T_{r,s}(M)$ heißt Vektorbündel von Tensoren vom Typ (r,s) über M.

Analog:

$$\begin{aligned} \bigwedge^k(TM) &:= \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge_k(T_pM) \\ \bigwedge^k(T^*M) &= \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge^k(T_p^*M) \end{aligned}$$

heißen äußere Potenzen von TM bzw. T^*M; entsprechend sind $\bigwedge^*(TM)$, $\bigwedge^*(T^*M)$ definiert.

Proposition

$$T_{r,s}(M), \quad \bigwedge^*(TM), \quad \bigwedge^k(T^M), \quad \bigwedge^*(TM), \quad \bigwedge^*(T^*M)$$

sind Vektorbündel über M.

Beweis: (Für $T_{r,s}$ andere analog)

- Eigenschaft 1) ist klar:

  $$\pi^{-1}(p) = T_{r,s}(T_pM)$$

  ist ein Vektorraum
- Eigenschaft 2) Sei (U,x) eine Karte um $p\in M$. Auf U existiert kanonische Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\in\Gamma(TU)$ s.d für alle

  $q\in M: \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_q,\dots,\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_q\in T_qM$

eine Basis mit Dualbasis $(\mathrm{d}x^1)(q),\dots,(\mathrm{d}x^n)(q)\in T_q^*M$

Entsprechend gilt $\forall q\in M$:

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_q\otimes\ldots\otimes\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_q\otimes\,\mathrm{d}x^{j_1}(q)\otimes\ldots\otimes\,\mathrm{d}x^{j_s}(q)\;TODO|\;i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s\in\{1,\dots,n\}\right\}$$

ist eine Basis von $T_{r,s}(T_qM)$. Entsprechend haben wir für jedes $q\in U$ eine Koordinatenabbildung

$$\varphi_q\colon T_{r,s}(T_qM)\xrightarrow{\cong}\mathbb{R}^{n^{r+s}}$$

die jedem $t \in T_{r,s}(T_qM)$ die Koordinaten in dieser Basis zugeordnet. Also haben wir eine Bijektion

$$\psi\colon \bigsqcup_{q\in U} \underbrace{T_{r,s}(T_pM)}_{=T_{r,s}(M)|_U} \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^{n^{r+s}}$$

$v \in T_{r,s}(T_qM) \mapsto (q, \varphi_q(v))$ Die diffbare Struktur auf $T_{r,s}(M)$ definiert man durch die Forderung, dass alle 4 Diffeomorphismen sind $\longrightarrow$ dann ist insbesondere (2) auf errfüllt.

Fazit

aus TM kann man jede Menge Vektorbündel Konstruieren (TM, $T_{r,s}(M)$ $(= T_{r,s}(TM))$, $\bigwedge^k TM$, $\bigwedge^k T^*M, \ldots$)

Slogan:

> man macht lineare Algebra/Tensorkonstruktionnen punktweise

Definition

Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel. Ein Schnitt s von E ist eine Abbildung

$$s\colon M \to E$$

mit

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_M$$

$(\Leftrightarrow \forall p \in M : s(p) \in \underbrace{E_p}_{=\pi^{-1}(p)})$

Bezeichung

$$\Gamma(E) = \{s\colon M \to E \text{ Schnitt}\}$$

der Raum der Schnitte von E.

- (1) $\Gamma(E)$ ist ein Vektorraum: $s_1,\ s_2 \in E,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p) \in E_p$, $(\lambda \cdot s_1)(p) := \lambda \cdot s_1(p) \in E_p$
- (2) Für $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$ kann man

  $$(f \cdot s)(p) := f(p)s(p) \in E_p$$

  definieren, $f \cdot s \in \Gamma(E)$

  Das macht $\Gamma(E)$ zu einem $C^\infty(M)$-Modul [$\Leftrightarrow (f_1 + f_2) \cdot s = f_1 s + f_2 s$, $(fg) \cdot s = f(g \cdot s)$]

Beispiel

- Vektorfeld auf M sind Schnitt im Tangentialbündel
- $C^\infty(M) = \Gamma(\underline{\mathbb{R}}) = \Gamma(M \times \mathbb{R})$

Definition

Schnitte von $T_{r,s}(TM)$ heißen Tensoren vom Typ (r,s) auf M.

Definition

$$\Gamma^k(M) := \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$$

heißen Differentialformen auf M

- $\Gamma^0(M) = \Gamma\left(\bigwedge^0 T^*M\right) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M)$
- $\Gamma^1(M) = \Gamma\left(\bigwedge^1 T^*M\right) = \Gamma(T^*M) = \text{Vektorfelder auf } M$

TODO Wenn (U,x) eine Karte von M ist $\rightsquigarrow$ bekommen

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} & \in & \Gamma(TM|_U) \\ \mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n & \in & \Gamma(T*M|_U) \end{array}$$

Daher sieht jeder Schnitt $\chi \in \Gamma(T_{r,s}(TM))$ auf U so aus:

$$\chi|_U = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s \in \{1,\ldots,n\}} \chi^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}$$

für gewisse $\chi^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \in C^\infty(U)$

Analog:

die Menge

$$\{\, \mathrm{d}x^{i_1}(q) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}(q) \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

bildet eine Basis in $\bigwedge^k T^*qM$ $\forall q \in U$

Daher sieht jede Differentialform $\omega \in \underline{O}^k(M)$ auf U so aus:

$$\omega|_U = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \omega_{i_1,\ldots,i_k} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

für gewisse $\omega_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U)$

Algebraisch heißt es:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} \; \mathit{TODO} \middle| \; i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

bildet eine Basis von $\Gamma(T_{r,s}(TM)|_U)$ über $C^\infty(U)$ Entsprechend für $\left\{ \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \mid \ldots \right\}$ für $\underline{\Omega}^k(U)$

D.h. jetzt können wir interpretieren was z.B. $\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$ ist:

Das ist eine 2-Form auf U (eine der Basis-2-Formen)

Erinnerung:

Für einen Vektoraum V haben wir festgestellt, dass

$$\bigwedge_k V \cong A_k(V) = \{f \colon V^k \to \mathbb{R} \mid \text{multiliniear, alternierend } \}$$

Daher definiert jede Differentialform

$$\omega \in \Omega^k(M) = \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$$

eine multilinieare alternierende Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(T^*M) \times \ldots \times \Gamma(T^*M) & \to & C^\infty(M) \\ (\mathcal{X}, \ldots, \mathcal{X}_k) & \mapsto & (p \mapsto (\omega(p))(\mathcal{X}_1(p), \ldots, \mathcal{X}_k(p))) \end{array}$$

Notation:

$$(\omega(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k))(p) := \omega(p)(\mathcal{X}_1(p), \ldots, \mathcal{X}_k(p))$$

Diese Konstruktion ist $C^\infty(M)$-linear

$$\omega(f\mathcal{X}, \ldots, \mathcal{X}_k) = f\omega(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k), \quad f \in C^\infty$$

Bemerkung:

Das gilt in jedem Argument

Analoge Konstruktion existiert für Tensorfelder:

da $T_{r,s}(T_pM) \cong M_{s,r}(T_pM), \quad \forall p \in M$

Dabei war

$$M_{s,r}(T_pM) = \{\alpha \colon \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{T_p^*M \times \ldots \times T_p^*M}_{r} \mid \alpha \text{ multiliniear}\}$$

definiert jedes Tensorfeld $t \in \Gamma(T_{r,s}(T_pM))$ eine $C^\infty(M)$-multilinieare Abbildung.

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \times \ldots \times \Gamma(T^*M) & \to & C^\infty(M) \\ (\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) & \mapsto & (p \mapsto (t(p))(\mathcal{X}_1(p), \ldots, \mathcal{X}_r(p), \alpha_1(p), \ldots, \alpha_s(p))) \end{array}$$

Differentialformen

$$\Omega(M) := \Gamma\left(\bigwedge_k \Gamma^* M\right) \quad k\text{-Differentialformen auf } M0$$

Lokal sieht jede $\omega \in \Omega^k(M)$ so aus:

$$\omega|_U = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \underbrace{\omega_{i_i,\ldots,i_k}}_{\in C^\infty(U)} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} =: \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \omega_I \, \mathrm{d}x^I$$

Ableitungsoperation (= das äußere Differential) auf Formen.

Letztes Mal:

$$\begin{array}{rcl} \Omega^0(M) & = & C^\infty \\ \Omega^1(M) & = & \Gamma(T^*M) \end{array}$$

haben schon die Ableitungsoperation (= Differential)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\colon \Omega^0(M) & \to & \Omega^1(M) \\ f & \mapsto & \mathrm{d}f \\ \mathrm{d}f(X) & := & X(f) \end{array}$$

definiert.

Satz: Existenz und Eindeutigkeit des äußeren Differentials

Sei $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^\infty \Omega^k(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M)$

Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\mathrm{d}\colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathrm{d}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$
- Leibnitz-Regel: $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$
- $d^2 = 0$ $(d_0 d = 0)$
- für $k = 0$ stimmt $\mathrm{d}\colon \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ mit den Differential einer Funktion überein (wie oben)

Beweis:

Wir definieren d folgendermaßen:

Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ mit der lokalen Darstellung

$$\omega = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \omega_I \, \mathrm{d}x^I$$

wie oben (U, x) eine Karte.

Definiere

$$\mathrm{d}\omega|_U := \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} \mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I$$

Mit dieser Definition gilt:

- (1') $\mathrm{d}\omega|_U \in \Omega^{k+1}(U)$, $\mathrm{d}\omega|_U$ hängt linear von ω ab
- (2') $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$, $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^l(U)$ (Beweis: es reicht, das für $\alpha = \alpha_I \,\mathrm{d}x^I$, $\beta = \beta_J \,\mathrm{d}x^J$ zu zeigen ($I \cap J = \emptyset$, $I < J$ in $\{1,\dots,n\}$, $\forall i \in I, j \in J : i < j$))

  $\alpha \wedge \beta = \alpha_I \beta_J \,\mathrm{d}x^{I \cup J} \Rightarrow \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \beta_J \,\mathrm{d}\alpha_I \wedge \mathrm{d}x^{I \cup J} + \alpha_I \,\mathrm{d}\beta_J \wedge \mathrm{d}x^{I \cup J} = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$

- $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$, $f + \Omega^0(M)$, weil

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \,\mathrm{d}x^j \wedge dx^i\right) = 0$$

- (4') für $k = 0$ ist $\mathrm{d}f|_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \,\mathrm{d}x^i = \mathrm{d} \underbrace{f}_{\text{Differential von } f}$
- (5') wenn $\omega_1 = \omega_2$ auf $\underbrace{V}_{\text{offen}} \subseteq U$, dann gilt

$$\mathrm{d}\omega_1|_V = \mathrm{d}\omega_2|_V$$

  (weil dres für Funktionen gilt)

Nun zeigen wir, dass somit d wohldefiniert ist d.h. $\mathrm{d}\omega|_U$ hängt nicht von der Wahl der Karte (U, x) ab. Dazu sei (U', y) eine andere Karte und d' das entsprechen definierte Differential:

$$\mathrm{d}'\omega|_U = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} \mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}y^I, \quad \omega = \sum \omega_I \,\mathrm{d}x^I$$

Zu zeigen: $\mathrm{d}'\omega = \mathrm{d}\omega$

Nach (4') TODOgilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}'(\wedge_I \,\mathrm{d}x^I) &\overset{\text{Leibnitz (2'TODO)}}{=} \mathrm{d}'\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I + \omega_1 \wedge \mathrm{d}'(\mathrm{d}x^I) \\ &\overset{(4')}{=} \mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I + 0 = \mathrm{d}(\omega_I \,\mathrm{d}x^I) \end{aligned}$$

weil:

$$\mathrm{d}'(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) \overset{(4')}{=} \mathrm{d}'(\mathrm{d}'x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}'x_{i_k}) \overset{(2')(3')}{=} 0, d'^2 = 0$$

Das d erfüllt (1) - (4) wegen (1') - (4') $\Rightarrow$ Existenz.

Zur Eindeutigkeit seien $\mathrm{d}^{(1)}$ und $\mathrm{d}^{(2)}$ zwei lineare Abbildungen, die (1) - (2) erfüllen.

Die Eigenschaften (1) - (4) implizieren, dass in jeder Karte (U, x) (1') - (4') erfüllt sind und wir haben gerade festgestellt, dass diese die Abbildung d eindeutig bestimmen.

Beispiel:

Sei $M = \mathbb{R}^2$, $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y \\ (&= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge dy) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Erinnerung:

geens Formel: $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ einfach geschlossen, Ω beschränktes Gebiet, von γ berandet.

$$\int_\gamma \mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_\Omega \mathrm{d}w = \int_{\partial\Omega} w$$

Integration von Differentialformen

Pullback: (Zurückziehen)

Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $f\colon M \to N$ glatt.

Erinnerung:

Wir können durch f Funktionen Zurückziehen für

$$\varphi \in \Omega^0(N) = C^\infty(N) \text{ ist } \underbrace{f^*(\varphi)}_{\in C^\infty(M)} := \varphi \circ f$$

$\Rightarrow f^*\colon \Omega^0(N) \to \Omega^0(M)$ linear (sogar Algebrahomomorphismus)

Errinnerung:

eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ definiert eine C^∞-lineare alternierend Abbildung

$$\begin{aligned} \omega\colon \Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM) &\to C^\infty(M) \\ X_1, \ldots, X_k &\mapsto (p \mapsto \omega(p)(X_1(p), \ldots, X_k(p))) \end{aligned}$$

Übung:

Jede C^∞-lineare alternierende Abbildung

$$\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

bestimmt eindeutig eine k-Form ω, die diese Abbildung induziert. (Beweis sie Buch Walschap) Sei $\omega \in \Omega^k(N)$ Definiere

$$(f^*(\omega)(X_1, \ldots, X_k))(p) := \omega(f(p))(f_*(X_1(p)), \ldots, f_*(X_k(p)))$$

$f^*(\omega)$ heißt Pullback von ω von ω. Durch Nachrechnen ergibt sich:

- (1) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(w_1) \wedge f^*(w_2)$
- (2) $\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega)$

Zu (2):

Sei U, x eine Karte von N

$$\omega|_U = \omega_I \,\mathrm{d}x^I = \omega_I \,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

$k = 0$:

wenn $\omega = \varphi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{d}\varphi)(X) &= \mathrm{d}\varphi(f_*X) \\ &= (f_*X)(\varphi) \\ &= X(\varphi \circ f) \\ &= X(f^*(\varphi)) \\ &= \mathrm{d}(f^*\varphi)(X) \end{aligned}$$

$k > 0$:

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (\omega_I \circ f) f^*(\mathrm{d}x^{i_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(\mathrm{d}x^{i_k}) \\ &= (\omega_I \circ f)\, \mathrm{d}(f^*(x^{i_1})) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(f^*(x^{i_k})) \end{aligned}$$

TODO

Integration von Differentialform

Idee: wir können in $\mathbb{R}^n$ integrieren also führen wir die Situation auf Mannigfaltigkeit darauf zurück.

Der k-Würfel in $\mathbb{R}^n$ ist $[0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$

Definition:

Sei $\omega = f \,\mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^k$ eine Differentialform auf $[0,1]^k$ (Errinnerung: d.h dass (e) eigentlich auf einer offenen Umgebung $V \supseteq [0,1]^k$ definiert ist)

Definiere

$$\mathrm{d}_{[0,1]^k}\omega := \mathrm{d}_{[0,1]^k} f(u)\,\mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^k$$

Definition:

Ein singulärer k-Würfel in M ist eine glatte Abbildung $e\colon [0,1]^k \to M$

Definition:

Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, $c\colon [0,1]^k \to M$ eine singulärer k-Würfel:

$$\int_c \omega := \int_{[0,1^k]} c^*(\omega)$$

Integration von Differentialform

Definition

Der k-Standardwürfel ist definiert als $[0,1]^k$ $(k \in \mathbb{N})$

$$[0,1]^0 := \{0\}$$

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein singulärer k-Würfel in M ist eine (glatte) Abbildung $c\colon [0,1]^k \to M$

TODO

Definition

Sei $\omega = \underbrace{f}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^k)} \mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^k$ eine k-Form von ω über $[0,1]^k$ $([0,1]^k \subset \mathbb{R}^k)$ ist definiert als

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^0} \omega &:= f(0)\\ \int_{[0,1]^k} \omega &:= \int_{[0,1]^k} f(u)\,\mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^k\end{aligned}$$

(Das Integral der Funktion f auf der rechten Seite der Definition im Sinne der Analysis)

Definition

Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, $c\colon [0,1]^k \to M$ ein singulärer Würfel in M. Das Integral von ω über c ist definiert als

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^k} c^* w$$

Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^k$, $c\colon [0,1]^k \to \mathbb{R}^k$, ein singulärer Würfel mit $\det D_x c \neq 0 \forall x \in [0,1]^k$. (Bemerkung: Diese Bedingung erzwingt, dass $\det D_x c > 0$(oder < 0)$\forall x \in [0,1]$)

Sei $\omega = f(u)\,\mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge du^k \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$

$$
\begin{aligned}
\int_c \omega \quad &= \quad \int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} f(c(x)) \det D_x c \,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^k \\
&\overset{\text{Transformationsformel}}{=} \pm \int_{c([0,1]^k)} f(u)\,\mathrm{d}^1 u^1 \cdots \,\mathrm{d}u^k TODO
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+ & \text{wenn } \det D_x c > 0 \\
- & \text{wenn } \det D_x c > 0\ , \forall x \in [0,1]^k
\end{array}
$$

TODO

$$
\begin{aligned}
c^* &= \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k \in \Omega^k([0,1]^k) \\
\tilde{f}(x) &= (c^*\omega)(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= \omega(c(x))\left(c_*\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, c_*\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= f(c(x))\,\mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}^k\left(D_x c\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, D_x c\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= f(c(x)) \det\Bigg(\underbrace{\mathrm{d}u^i\Bigg(\qquad \underbrace{D_x c\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{j\text{-te Spalte der Jacobi-Matrix}} \qquad\Bigg)}_{i\text{-te Komponente}}\Bigg)_{i,j=1}^k \\
&= f(c(x)) \cdot \det D_x c \\
&= \pm \int_{c([0,1]^k)} f(u)\,\mathrm{d}u^1 \cdots \,\mathrm{d}u^k
\end{aligned}
$$

Lemma

Das Integral von ω über einen singuläreren Würfel $c\colon [0,1]^k \to M$ ist parametrisierungsunabhängig: Wenn $F\colon [0,1]^k \to [0,1]^k$ ein Diffeomorphismus mit $\det D_x F > 0 \forall x \in [0,1]^k$, dann gilt:

$$\int_{c\circ F} \omega = \int_c \omega, \qquad \forall \omega \in \Omega^k(M)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{c\circ F}\omega \quad & \overset{\text{Def.}}{=} \quad \int_{[0,1]^k}(c\circ F)^*\omega \\
& = \quad \int_{[0,1]^k} F^*(c^*\omega) \\
& \overset{\text{Def.}}{=} \quad \int_F c^*\omega \\
& \overset{\text{Bsp.}}{=} \quad \int_{F([0,1]^k)} c^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^k}\right)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^k \\
& \overset{F([0,1])=??[0,1]^k}{=} \quad \int_{[0,1]^k} c^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^k}\right)\mathrm{d}u^1,\dots,\mathrm{d}^k \\
& = \quad \int_{[0,1]^k} c^*\omega \\
& \overset{\text{Def.}}{=} \quad \int_c \omega
\end{aligned}$$

TODO

Definition

Sei M eine Mfg., $k\in\mathbb{N}$. Eine k-Kette in M ist ein Element des freien $\mathbb{R}$-Vektorraumes auf der Menge singulärerer k-Würfel in M, d.h. eine formale Linearkombination.

$$\sum_{i=1}^N a_i c_i$$

mit $a_i\in\mathbb{R}$, $c_i\colon[0,1]^k\to M$ singulärer k-Würfel. Für $\omega\in\Omega^k(M)$ definiere

$$\int_{\sum_{i=1}^N a_i c_i} \quad := \quad \sum_{i=1}^N a_i\int_{c_i}\omega$$

Sei $W_k := [0,1]^k$ der Standardwürfel in $\mathbb{R}^k$

$$\partial W_k = \bigcup_{i=0}^k W_{i,0}\cup\bigcup_{i=0}^k W_{i,1}$$

$$\begin{aligned}
W_{i,0} \quad & = \quad \{x\in W \mid x=(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_k)\} \\
& = \quad \{x\in W\mid x_i=0\} \\
& \cong \quad W_{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{i,1} \quad & = \quad \{x\in W_k\mid x_i=1\} \\
& \cong \quad W_{k-1}
\end{aligned}$$

Definition

Sei $c\colon W_k \to M$ ein singulärer k-Würfel. Der Rand von c ist die singuläre $(k-1)$-Kette

TODO

$$\partial c := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} c|_{W_{i,j}}$$

$c|_{W_{i,j}}$ ist ein singulärer $(k-1)$-Würfel, weil $W_{i,j} \cong W_{k-1}$ wie oben

Beispiel

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Rightarrow \quad \partial c = 0 \\
k = 1 \quad &\Rightarrow \quad \partial c = c|_{\{1\}} - c|_{\{0\}} \\
k = 2 \quad &\Rightarrow \quad \partial c = -c|_{W_{1,0}} + c|_{W_{1,1}} - c|_{W_{2,1}} + c|_{W_{2,0}}
\end{aligned}$$

TODO Es gilt $\partial(partial(c)) = 0$. ($k = 1$ klar, $k = 2$:)

$$\partial(\partial(c)) = \cancel{c|_{\{A\}}} - \cancel{c|_{\{D\}}} + \cancel{c|_{\{B\}}} - \cancel{c|_{\{A\}}} + c|_{\{C\}} - \cancel{c|_{\{B\}}} + \cancel{c|_{\{D\}}} - c|_{\{C\}}$$

Beweis: sie Walschap

Bemerkung/Übung:

Für jeden singulären Würfel c ($\Rightarrow$ für jede Kette) gilt $\partial^2(c) := \partial(\partial(c)) = 0$

Beispiel

Sei $c = \sum_{i=1}^{N} a_i c_i$ eine 1-Kette in $\mathbb{R}$ ($c_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$), $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\int_c \mathrm{d}f = \int_{\partial c} f$$

Beweis:

Nach Linearität reicht es, dies für einen singulären 1-Würfel $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}
\int_c \mathrm{d}f \quad &= \quad \int_{[0,1]} c^*(\mathrm{d}f) \\
&= \quad \int_{[0,1]} (f \circ c)' du \\
&\overset{\text{Haupsatz der Diff/ und Int-Rechnung}}{=} \quad f(c(1)) \\
&= \quad f(c(0)) - f(c(0)) \\
&= \quad \int_{\partial c} f
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= f'(t)\mathrm{d}t \\
c^*(diffdf) = \tilde{f}(u)\mathrm{d}u = (f \circ c)'\,\mathrm{d}u & \\
\tilde{f}(u) &= c^*(\mathrm{d})(\frac{\partial}{\partial u}) \\
&= \mathrm{d}f(c_* \frac{\partial}{\partial u}) \\
&= f'(c'(u))\mathrm{d}t(c_* \frac{\partial}{\partial u}) \\
&= f'(c(u))c'(u)
\end{aligned}
$$

Nächstes Ziel

Satz von Stokes:

1. lokale Form $\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega$ (c-k-Kette, $\omega \to (k-1)$-Form)
2. Erweiterung der Integration auf Mannigfaltigkeit

wenn $\dim M = n(+\dots)$ für $\omega \in \Omega^n(M) \rightsquigarrow \int_M \omega$ und

$$
\int \underbrace{M}_{\text{Mannigfaltigkeit mit Rand}} \mathrm{d}\omega' = \int_{\partial M} \omega'
$$

Integration von Differentialformen

M – eine Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^k(M)$

$$
c\colon [0,1]^k \to M
$$

singulärer k-Würfel

$$
\int_c \omega \quad := \quad \int_{[0,1]^k} c^*\omega
$$

$(c^*\omega \underbrace{\text{linear}} = f(u)\,\mathrm{d}u^1 \wedge \dots \wedge du^k)$

haben auch

$$
\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} c_{i,j}
$$

$c_{i,j}$ ist Einschränkung von c auf $W_{i,j} \leftarrow$ Randkomponente von $[0,1]^k$

TODO

$$
\partial c = c|_{W_{1,1}} - c|_{W_{1,0}} + c|_{W_{2,0}} - c|_{W_{2,1}}
$$

Satz von Stokes lokale Version

$$\underbrace{\text{Newton-Leibnitz}}_{k=1} - \underbrace{\text{Green}}_{k=2} - \underbrace{\text{Gauss-Ostragradisk}}_{k=3} - \underbrace{\text{Stokes-Poincaré}}_{k\in\mathbb{N}}$$

Wenn $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, $c\colon [0,1]^k \to M$ singulärer k-Würfel.

Dann gilt:

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Beweis:

Zunächst $M = \mathbb{R}^k$, $c\colon [0,1]^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k$

Für $k = 2$:

$$\begin{aligned} \omega &\in \Omega^1([0,1]^2) \\ \Rightarrow \omega(u) &= f_1(u)\mathrm{d}u^2 + f_2(u)\mathrm{d}u^1, \quad u \in [0,1]^2, f_1, f_2 \in C^\infty\left([0,1]^2\right) \end{aligned}$$

Integrieren ist linear $\Rightarrow$ können $f_1(u)\mathrm{d}u^2$, $f_2(u)\mathrm{d}u^1$ separat behandeln

$$\mathrm{d}(f_1(u)\mathrm{d}u^2) = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}^u 1 \wedge \mathrm{d}u^2$$

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2 &\overset{\text{Def.}}{=} \int_{[0,1]^2} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u^1\right] \mathrm{d}u^2 \\ &= \int_0^1 \left(f_1(1,u_2) - f_1(0,u_2)\right) \mathrm{d}u^2 \\ &= \int_{W_{1,1}} f_1(u_1,u_2)\,\mathrm{d}u^2 + \int_{W_{2,0}} \underbrace{f_1(u)}_{=0}\,\mathrm{d}u^2 \\ &- \int_{W_{2,1}} \underbrace{f_1(u)}_{=0}\,\mathrm{d}u^2 - \int_{W_{1,0}} f_1(u_1,u_2)\,\mathrm{d}u^2 + \\ &= \int_{\partial[0,1]^2} f_1(u)\,\mathrm{d}u^2 \end{aligned}$$

Für $f_2(u)\mathrm{d}u^1 \rightsquigarrow \mathrm{d}(f_2(u)\mathrm{d}u_1) = -\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2$

Dann bekommt man analog

$$-\int \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\mathrm{d}u_1 \wedge \mathrm{d}u_2 = \int_{\partial[0,1]^2} f_2(u)\mathrm{d}u^1$$

(beachte Vorzeichen bei Randkomponenten!)

Im Allgemeinen (für $k \in \mathbb{N}$): jedes $\omega \in \Omega^{k-1}\left([0,1]^k\right)$ ist von der Form

$$\omega(u) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{f_2(u)}_{\in C^\infty([0,1]^k)} \mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^{i-1} \wedge \mathrm{d}u^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^k$$

Dach über $\mathrm{d}u^i$ heißt weglassen.

$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} c_{i,j}$$

Wegen Linearität reicht es einen Summanden

$$\omega_i = f_i(u)\mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}u^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^k$$

zu betrachten

$$\mathrm{d}\omega_i = (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^k$$

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^k} \mathrm{d}\omega_i \quad &= \quad \int_{[0,1]^k} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \, \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^k \\
&= \quad \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^{i+1} f_i(u^1, u^{i+1}, 1, u^{i+1}, \ldots, u^k) \mathrm{d}u^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}u^1} \cdots \mathrm{d}u^k \\
&- \quad \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^{i+1} f_i(u^1, \ldots, u^{i-1}, 0, u^{i+1}, \ldots, u^k) \, \mathrm{d}u^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}u^i} \cdots \mathrm{d}u^k \\
(*) = \quad & \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{l+j} \int_{W_{l,j}} \omega_i = \int_{\partial c} \omega_i
\end{aligned}$$

Beachte $(*)$ alle Summanden mit $l \neq i$ verschwinden (da ist eine der Variablen $u^1, \ldots, u^{i-1}, u^{i+1}, \ldots, u^k$ konstant)

Allgemeiner Fall:

$c \colon [0,1]^k \to M$, $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$

$c_{i,j} = c|_{W_{i,j}} \cong W_{k-1}$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \omega \quad &= \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{1} (-1)^{i+1} \int_{c_{i,j}} \omega \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j} \int_{[0,1]^{k-1}} c_{i,j}^* \omega \\
&= \quad \int_{\partial [0,1]^k} c^* \omega \\
&\overset{\text{Stokes für } [0,1]^k \text{ eben bewiesen}}{=} \quad \int_{[0,1]^k} \mathrm{d}(c^* \omega) \\
&\overset{\mathrm{d}c^* = c^* \mathrm{d}}{=} \quad \int_{[0,1]^k} c^*(\mathrm{d}\omega) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \quad \int_c \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Errinnerung:

Dann gilt:

$$\int_{c \circ F} \omega \quad = \quad \int_c \omega, \quad \omega \in \Omega^k(M)$$

Fazit:

$\int \omega$ ist koordinatennabhängig, wenn man nur orientierungserhaltende Koordinatentransformation zulässt.

Definition

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn $\exists \omega \in \Omega^n(M)$ mit $\omega(p) \neq 0$, $\forall p \in M$.

Bemerkung

Die Wahl einer Volumenform ω definiert eine Orientierung von T_pM für jedes $p \in M$

($(e_1, \ldots, e_n) \in T_pM$ ist positiv orientiert $\Leftrightarrow \omega(e_1, \ldots, e_n) > 0$)

(M ist also orientierbar, wenn man alle T_pM konstant orientieren kann)

Bemerkung

Innerhalb einer Karte (U, x) existiert immer eine Volumenform $\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$

D.h. Orientierbarkeit hängt davon ab, ob man diese lokalen Volumenformen zu $\omega \in \Omega^n(M)$ „verkleben“ kann. Solche „lokal-zu-global“-Fragen werden mit der Teilung der Eins behandelt

Definition

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in M \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

Definition

Eine Teilung der Eins auf M ist eine Familie $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C^\infty(M, [0,1])$

1. $\{\operatorname{supp} \varphi_\alpha\}$ ist lokal endlich, d.h. $\forall p \in M$ gibts nur endlich viele $\alpha \in A$ mit $p \in \operatorname{supp} \varphi_\alpha$
2. $$\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1, \forall p \in M$$

TODO

Satz

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von M. Dann existiert eine Teilung der Eins $\{\varphi_k\}_{k \in K}$ mit der Eigenschaft $\forall k \in K \exists \alpha \in A$

(die Teilung der Eins ist der Überdeckung untergeordnet)

Die Menge K kann sogar abzählbar gewählt werden.

Beweis: wird nachgeliefert

Bemerkung

Kurzfassung des Satzes: Mannigfaltigkeiten sind *parakompakt*

Proposition

M ist orientierbar genau dann, wenn es einen Atlas

$$\mathcal{A} = \{(U, x)\}$$

von M gibt mit der Eigenschaft $\det D_\xi(y \circ x^{-1}) > 0, \xi \in x(U \cap V)$, für alle (U, x), $(V, y) \in \mathcal{A}$

Beweis:

Orientierbarkeit $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$:

Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine Volumenform

$$\mathcal{A} := \left\{ \underbrace{(U, x)}_{\text{Karte}} \,\middle|\, \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) > 0 \right\}$$

Das ist ein Atlas (nimm beliebige (U', x') und stelle zwei Koordinaten gegebenenfalls um) $\mathcal{A}$ erfüllt die Aussage des Satzes, weil wegen (U, x), (V, y) zwei Karten mit $U \cap V \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \omega = f \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n = g \, \mathrm{d}y^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^n$$

auf $U \cap V$ mit $f,\, g \in C^\infty(U \cap V),\ f(p) \neq 0,\ g(p) \neq 0,\ p \in U \cap V,$ (weil $\omega \neq 0$)

Es gilt:

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^n = \frac{f}{g} \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$$

und

$$h = \frac{f}{g} > 0$$

Andererseits gilt

$$h(p) = \det D_p(y \circ x^{-1})$$

weil $f = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$, $g = \omega\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right)$

$p \in U \cap V$ (Umbenennung von Differentialformen)

$\Rightarrow \mathcal{A}$ orientiert

Übung 3

$$N = \mathbb{R}^n \xrightarrow[\substack{y^1 = f_1(x) \\ y^2 = f_2(x)}]{f} N = \mathbb{R}^m$$

$$x^1, \ldots, x^n \qquad\qquad\qquad y^1, \ldots, y^m$$

$$\varphi \colon N \to \mathbb{R} \quad (\varphi = \varphi(y^1, \ldots, y^n))$$

$$(f^*\varphi)(x) = \varphi(f(x)) = \varphi(f^1(x), \ldots, f^n(x))$$

(Index, keine Potenz)

$$f^* y^1 = f^1, \quad f^* y^k = f^k$$

1-Formen Zurückziehen

$$\begin{array}{rcl} f^*(\mathrm{d}y^1) & \in & \Omega^1(M) \\ f^*(\mathrm{d}y^1) & = & \sum_{i=1}^{m} \omega_i \mathrm{d}x^i \\ \omega_i & = & (f^*(\mathrm{d}y^1))\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ & = & \mathrm{d}y^1\left(f_*\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ & \overset{(*)}{=} & \mathrm{d}y^1 \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^1}\right)}_{=Df(e_1)} \\ & = & \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ & \Rightarrow & f^*(\mathrm{d}y^1) \\ & = & \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \\ & = & \mathrm{d}f^1 \\ & = & \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i}_{\text{„Differentialform“}} \end{array}$$

Beispiel

$m = 2$, $n = 3$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} (\xi, \eta) & \mapsto & (\xi^2, -2\xi\eta, \eta^3) \\ w & = & x\mathrm{d}x - 3xyz\mathrm{d}y + zx\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

$$f^*\omega = \xi^2 \dots TODO$$

TODO

** Vorlesung

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Folgende Bedingungen sind äquivalent

1. M ist orientierbar 2. $\exists \mathcal{A}$, einen Atlas für M, s.d. $\forall (U, x), (V, y) \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\det D_\eta(x \circ y^{-1}) > 0 \forall \exists y \in y(U \cap V)$$

Beweis:TODO(1.) $\Rightarrow$ (2.) letzes Mal erbracht.

Erinnerung M orientierbar $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists \omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ mit $\omega(p) \neq 0 \forall p \in M$ (ω heißt dann Volumenform)

Für (2.) $\Rightarrow$ (1.) brauchen wir die Existenz der Teilung der Eins. Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas wie in (2):

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}, \quad U_\alpha \text{ überdecken } M$$

$\Rightarrow$ $\exists(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilung der Eins aufgefasst an U_α ($\forall k \in \mathbb{N} \exists \alpha_k \in \mathcal{A}$ s.d. $\operatorname{supp}\varphi_k \subset U_{\alpha_k}$)

TODO Definiere die n-Form ($n = \dim M$)

$$\omega_k(p) := \varphi_k(p)\,\mathrm{d}x^1_{\alpha_k} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n_{\alpha_k}, \quad p \in M$$

$$\varphi_k \quad (\omega_k(p) := 0,\ p \notin U_{\alpha_k})$$

TODO Sei $\Omega^n(M) \ni \omega := \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k$. Dies ist endliche Summe an jedem $p \in M$ wegen der Eigenschaft der Teilung der Teilung der Eins.

ω verschwindet nirgends, weil: $\forall p \in \operatorname{supp}\varphi_k$

$$\omega(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^1_{\alpha_k}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n_{\alpha_k}}\right) = \underbrace{\varphi_k(p)}_{>0} + \sum_{\substack{k'\in\mathbb{N}\\ k'\neq k}} \underbrace{\omega_{k'}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^1_{\alpha_k}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n_{\alpha_k}}\right)}_{\geqslant 0,\ \neq 0}$$

$$\begin{aligned} \omega_k(p)(\ldots) &\overset{\operatorname{supp}\varphi_{k'}\in U_{\alpha_{k'}}}{=} \varphi_{k'}(p)\cdot\det D_{x_{\alpha_k(p)}}\left(x'_{\alpha_k}\circ x^{-1}_{\alpha_k}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Satz: Existenz der Teilung der Eins

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Für jede Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M existiert eine (abzählbare) Teilung der Eins $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ die dieser Überdeckung untergeordnet ist. (d.h. $\forall j \in \mathbb{N} \exists \alpha$ mit $\operatorname{supp}\varphi_j \subset U_\alpha$)

Erinnerung: Teilung der Eins „Teilung der Eins" heißt $\varphi_k \subset C^\infty(M, [0,1])$ mit

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(p) = 1, \quad \forall p \in M$$

endlich $\forall p \Leftrightarrow \forall p \in M$ heißt nur in endlich vielen von $\{\operatorname{supp}\varphi_k\}$

Beweis:

TODO

1. Ziel:

Schreibe $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, s.d. A_k kompakt, $\operatorname{int}(A_k) \subset A_{k+1}$. M ist lokalkompakt (da lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$), zweitabzählbar $\Rightarrow \exists (Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$, eine abzählbare Basis der Topologie mit $\overline{Z_i}$ kompakt.

Sei $A_0 := \overline{Z_0} \Rightarrow A_0$ kompakt. Induktive Konstruktion: gegeben A_k kompakt. Sei $i_k \in \mathbb{N}$ minimal mit

$$A_k \subset Z_0 \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_{i_k}$$

(i_k existiert, da $\bigcup Z_i = M \cup A_k$ kompakt)

Setze

$$A_{k+1} := \overline{Z_0} \cup \overline{Z_1} \cup \overline{Z_{i_k}} \cup \overline{Z_{k+1}}$$

A_k aufsteigend, $\bigcup_k \operatorname{int} A_k = M$, da $\bigcup_k Z_k = M$ Setze außerdem $A_{-1} := \emptyset$, dan gilt:

$$M = \bigcup k \in \mathbb{N} A_k \setminus (\operatorname{int} A_{k-1})$$

$\forall p \in M : \exists (V_p, x_p)$ Karte mit:

1. $x_p(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$
2. $V_p \subset U_\alpha$
3. $x_p(v_p) = B(3,0) \subset \mathbb{R}^n$
4. $V_p \subset \operatorname{int} A_{k+2} \setminus A_{k-1}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt: $\{x_p^{-1}(\underbrace{B(0,1)}_{\subset \mathbb{R}^n})\}_{p \in A_{k+1} \setminus \mathrm{A_k}}$ ist eine Überdeckung von $A_{k+1} \setminus \operatorname{int} A_k$. Diese Menge ist kompakt. $\Rightarrow$ diese Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung $\{P_{i,k}\}_{i=1}^{N_k}$

$$\{P_{i,j}\}_{\substack{k \in \mathbb{N}, \\ i=1,\dots,N_k}}$$

ist eine Überdeckung von M, die abzählbar ist, untergeordnet der $\{U_\alpha\}$ ist (jedes $P_{i,k}$ liegt in einem U_α). Wir können sie also als $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ umnummerieren.

Nach Konstruktion gilt: jedes Q_j ist enthalten in einem V_{p_j} zu einer Karte (V_{pj}, x_{pj}) mit:

$$x_{pj}(v_{pj}) = B(0,3), \quad x_{pj}(Q_j) = B(0,1)$$

Sei $\theta \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ glatt mit der Eigenschaft

1. $\theta(u) = 1$, $\|u\| < 1$
2. $\theta(u) = 0$, $\|u\| > 2$

(Siehe Übung 24)

TODO Sei

$$\psi_j(p) := \begin{cases} \theta \circ x_{p_j}(p), & p \in V_{p_j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt:

$$\psi_j \in C^\infty(M, [0,1])$$

Behauptung:

$\forall p \in M$ sind nur endlich viele $\psi_j(p) \neq 0$. Wenn $p \in A_k$ mit $\psi_j(p) \neq 0$

$\Rightarrow p_j \in A_{k-1} \cup A_k \cup A_{k+1}$ nach Konstruktion von $V \Rightarrow$ es gibt nur endlich viele Möglichkeiten für p_j

Nun ist $\varphi_j := \frac{\psi_j}{\sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j}$ die gewünschte Teilung der Eins.

letzes Mal: Beweis des Satzes über Existenz einer Teilung der Eins.

Satz

Jede Mannigfaltigkeit M ist parakompakt. d.h. für jede Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M existiert eine untergeordnete Teilung der Eins $\{\varphi_k\}$ (sogar abzählbar)

Standardanwendungmuster: haben eine Konstruktion innerhalb der Karte (U, x) Um eine Konstruktion global auf M zu bekommen, machen wir es innerhalb jeder Karte $\{U_\alpha\} = \{(U, x) \mid (U, x) \text{ Karte}\}$ und verkleben es mit Hilfe der Teilung der Eins.

(Beispiel: Existenz von orientierten Karten $\Leftrightarrow$ Orientierbarkeit)

Erinnerung: M orientierbar $\overset{\text{det}}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ Volumenform (nirgends verschwindent) $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$

Beweis: ω_1, ω_2 Volumenform $\Rightarrow \exists f \in C^\infty(M)$ nirgends verschwindend mit $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ (weil $\dim \bigwedge^n T_p^* M = 1$)

Wenn M zshgoh. ?? $\Rightarrow f > 0$ oder $f < 0$

Definition

Zwei Volumenformen ω_1, ω_2 definieren die gleiche Orientierung von M, wenn $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ für ein $f \in C^\infty(M, (0, \infty))$

M heißt orientiert, wenn eine entsprechende Äquivalenzklasse von Volumenformen fixiert ist.

Definition

Die Standardorientierung von $[0, 1]^n$ ist gegeben durch die Äquivalenzklasse von $\mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge u^n$

Definition

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit, von Dimension n, ω eine entsprechende Volumenform:

Ein n-Würfel $c\colon [0, 1]^n \to M$ heißt orientiert, wenn $c^*\omega = f(u) \cdot \mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^n$ mit $f(u) > 0 \ \forall u \in [0, 1]^n$

Lemma (Koordinateninvarianz der Integration)

Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ ($\dim M = n$), c_1, $c_2\colon [0,1]^n \to M$ orientierte Würfel. Dann gilt: wenn $\operatorname{supp}\omega \subseteq c_1\left([0,1]^n\right) \cap \left([0,1]^n\right)$, gilt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

Beweis:

Betrachte die Verknüpfung $c_2^{-1} \circ c_1\colon [0,1]^n \to [0,1]^n$. Sie ist orientierungserhaltend.

$$\int_{c_2} \omega = \int_{c_2 \circ c_2^{-1} \circ c_1} \omega = \int_{c_1} \omega$$

Erstes =: Invarianz der Integr. unter orientierungserhaltenden Abbildungen

Definition

Sei $\omega \in \Omega^n(M)$, $n = \dim(M)$ eine n-Form s.d. $\exists c\colon [0,1]^n \to M$ orientiert mit $\operatorname{supp}\omega \subseteq c\left([0,1]^n\right)$

Definiere:

$$\int_M \omega := \int_c \omega$$

Nach dem Lemma ist es wohldefiniert

TODO Bildchen: Hase I TODO irgendwann später verändertes Bildchen

Bemerkung:

Insbesondere ist $\int_M \omega$ nur definiert, wenn M orientiert ist.

Definition

Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompakten Träger. Sei jetzt $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine Überdeckung von M durch offene Mengen, s.d. für jedes α ein orientierter Würfel $c_\alpha\colon [0,1]^n \to M$ existiert mit $U_\alpha \supseteq c_\alpha([0,1]^n)$ (solche Überdeckung existiert z.B. weil man die Karten betrachten kann)

Sei $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die untergeordnete Teilung der Eins.

Wir definieren:

$$\int_M \omega := \sum_{k\in N} \underbrace{\int_M \varphi_K \cdot \omega}_{\text{(vorherige Definition)}}$$

Beachte:

die Summe (oben) hat stets nur endlich viele Terme.

Bemerkung:

$\int_M \omega$ ist wohldefiniert: wenn $\{V_\beta\}$ eine andere Überdeckung mit entsprechender Teilung der Eins $\{\psi_l\}$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_M \varphi_k \cdot \omega}_{} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \int_M \varphi_k \psi_l \cdot \omega \\
&\overset{\text{Summen endlich}}{=} \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_M \psi_l \varphi_k \cdot \omega \\
&= \underbrace{\sum_{l\in\mathbb{N}} \int_M \psi_l \cdot \omega}_{}
\end{aligned}$$

Nach den üblichen Eigenschaften des Integrals gilt:

$$\int_M (\omega_1 + \omega_2) = \int_M \omega_1 + \int_M \omega_2, \quad \int_M \lambda\omega = \lambda \int_M \omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

wenn $\omega = f \cdot \mathrm{vol}$ mit $f \geqslant 0$, gilt

$$\int_M \omega \geqslant 0$$

Bemerkung

Folgende Beobachtung erleichtern die Integration

1. Auf M ist der Begriff einer Nullmenge wohldefiniert: $A \subseteq M$ ist ene Nullmengem, wenn $x(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge für jede Kante (U, x). Wie in $\mathbb{R}^n$ ignoriert man Nullmengen bei Integration.

2. Wenn M bis auf eine Nullmenge durch endlich viele Karten überdeckt wird. Kann man Integration ohne Teilung der Eins durchführen:

$$M = \bigsqcup_{i=1}^{k} U_i \cup \underbrace{A}_{\text{Nullmenge}}$$

dann gilt:

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\underbrace{U_i}_{\text{das kann man in Koordinaten ausrechnen}}} \omega$$

TODO Bildchen Schuppen dragon

Beweis:

Nach (1) kann man A bei Integration ignorieren, $U_i \subset M$ sind selbst Mannigfaltigkeiten. Wähle jetzt Teilung der Eins $\psi_{i,l}$ für U_i's, dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \omega &\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{k} \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_M \psi_{i,l}\omega \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \omega \end{aligned}$$

Beispiel:

$M = S^1$,

TODO

$$x^{-1} \colon (0, 2\pi) \to S^1, \quad \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$U := x^{-1} \colon ((0, 2\pi)) = S^1 \setminus \{ \underbrace{(1,0)}_{\text{Nullmenge}} \}$$

D.h. wenn $\omega \in \Omega^1(S^1)$, gilt $\omega|_U = f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

$$\rightsquigarrow_{S'} \omega = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Analog:

jedes $\omega \in \Omega^2(S^2)$ hat die Gestalt

$$\omega = f(\theta, \varphi)\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$$

in sphärischen Koordinaten,

$$\begin{aligned} \int_{S^2} &= \int_{S^2} f(\theta, \varphi)\,\mathrm{d}\theta \wedge\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Nächstes Ziel:

Stokes-Formel:

Errinnerung:

lokale Version:

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega$$

globale Version:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

hier brauchen wir Mannigfaltigkeit mit Rand zu verstehen

Bemerkung:

Wir werden $\partial M = \emptyset$ zulassen (Mannigfaltigkeit ohne Rand)

Definition

Eine topologische n-Mannigfaltigkeit mit Rand (M, ∂) ist ein zweitabzählbarer Hausdorffraum M mit der Eigenschaft:

für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \ni p$ und einen Homöomorphismus

$$x \colon U \to x(U)$$

wobei $x(U)$ eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$

oder

$$H^n := \{u \in \mathbb{R}^n \mid u^n \geqslant 0\}$$

und $x(p) = 0$

Der Rand ∂M besteht genau aus den Punkten, deren Umgebung unter einer Karte nach H^n geschickt wird. Eine differenzierbare Struktur definiert man wie bei normalen Mannigfaltigkeiten.

Beispiel:

$M = \overline{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = S^{n-1}$

TODO

Beweis:

∂M ist eine Mannigfaltigkeit von Dimension $n-1$: wann $p \in \partial M$, ist $U \cap \partial M$ eine Umgebung von p in ∂M

$$x \colon (U \cap \partial M) \to x(U \cap \partial M) \subset \partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$$

ist eine Karte für ∂M an p.

Nächstes mal: um der Stokes-Formel Sinn zu geben werden wir für orientiertes M eine Orientierung auf ∂M angeben.

letztes Mal: Mannigfaltigkeiten mit Rand

Erinnerung: $(M, \partial M)$, modelliert auf $\mathbb{R}^n$ oder auf $H^n = \{x \in R^n \mid x^n \geqslant 0\}$

TODO

$$\begin{aligned} M = \overline{B}(0,1) &\subset \mathbb{R}^{n+1} \\ \partial M &= S^m \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

Beweis:

$$\dim M = n \Rightarrow \dim \partial M = n-1$$

Ziel:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \forall \omega \in \Omega^k(M)$$

TODO Errinnerung: eine glatte Funktion au H^n ist per Definition die Einschränkung einer glatten Funktion von $\underbrace{U}_{\mathbb{R}^n,\text{ offen}} \supseteq H^n$

Folglich ist $T_pH^n \cong T_p\mathbb{R}^n \quad \forall p \in \partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$

Daher gilt T_pM hat Dimension n selbst für Punkte auf ∂M !

(insbesondere $\neq T_p(\partial M)$)

Definition

Sei $v \in T_pM$, $p \in \partial M$. v heißt nach außen (bzw. nach innen) zeigend, wenn $v(x^n) < 0$ für jede Karte (U, x) mit $x(p) = 0$

TODO

Bemerkung

Dies ist wohldefiniert, weil für jede andere Karte (V, y) mit $y(p) = 0$ gilt:

$$D(y \circ x^{-1}) = [TODO]\,TODO$$

(weil $y \circ x^{-1} \colon H^n \overset{Diffeo}{\to} H^n$) TODO

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{-1} &= x^{-}1|_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ \tilde{y}^{-1} &= y^{-1}|_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{aligned}$$

mit $\alpha > 0$

Wenn M orientiert ist, bekommen wir auch eine Orientierung auf ∂M: wenn $\{(U, x)\}$ ein orientierter Atlas von M ist $\Rightarrow \det D_{x(p)}(y \circ x^{-1}) > 0$, auch für $p \in \partial M$, was $\det D_0(y \circ x^{-1}) = \alpha \det D_0(\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1})$

$\Rightarrow \{(U \cap \partial M, \tilde{x})\}$ ist ein orientierter Atlas für ∂M

Geometrisch

$v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_p(\partial M)$ ist positiv orientiert $\Leftrightarrow v, v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_pM$ positiv orientiert für jedes nach außen zeigende v

TODO Ziel:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \forall \omega \in \Omega^{n-1}(M)$$

Erinnerung

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_M \varphi_k \,\mathrm{d}\omega, \quad (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}\text{Teilung der Eins}$$

s.d.

$$\operatorname{supp}\varphi_k \subset c([0,1]^n), c\colon [0,1]^n \to M \text{ positiv orientiert}$$

Für eine Mannigfaltigkeit mit Rand gilt: Es gibt eine Überdeckung $U = \{U_i\}_i$ von M mit der Eigenschaft: jedes $U_i \subseteq c([0,1]^n)$, wobei $c\colon [0,1]^n \to M$ orientierungserhaltend mit entweder

$$c([0,1]^n) \subset M\partial M$$

oder

$$c([0,1]^n) \cap \partial M = c_{n,0}([0,1]^{n-1})$$

TODO (U existiert nach Definition von einer Mannigfaltigkeit mit Rand: (benutze Karten)

Notation

Wenn M orientiert ist, bezeichnen wir durch $-M$ die Mannigfaltigkeit M mit Umgekehrter Orientierung (mit Volumenform $-\omega$ statt ω)

NB:TODO

$$\int_{-M} \alpha = -\int_M \alpha$$

Satz(Newton, Leibnitz, Green, Gauss, Poincaré)

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, $\dim M = n$; sei $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, $\operatorname{supp}\omega$ ist kompakt. Dann gilt:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.,$$

Beweis:

Sei U eine Überdeckung wie oben, (φ_k) die untergeordnete Teilung der Eins, haben dann

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_M \varphi_k \cdot \mathrm{d}\omega$$
$$\operatorname{supp}\varphi_k \subseteq \underbrace{U_{i_k}}_{\text{offen}} \subseteq c\left([0,1]^n\right)$$

TODO Wenn $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\operatorname{supp}\omega \subseteq U_{i_k} \subseteq c\left([0,1]^n\right)$, $c([0,1]^n) \cap \partial M = \emptyset$
$\Rightarrow \operatorname{supp}\omega \cap \partial\left(c[0,1]^n\right) = \emptyset$ und

$$\int_M \mathrm{d}\omega \overset{\text{Def.}}{=} \int_c \mathrm{d}\omega \overset{\text{lokale Version}}{=} \int_{\partial c} \omega = 0$$

Andererseits $\int_\partial \omega = 0$, weil $\operatorname{supp}\omega \cap \partial M = \emptyset$
Wenn $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\operatorname{supp}\omega \subseteq U_{i_k} \subseteq c\left([0,1]^n\right)$:

$$c\left([0,1]^n\right) \cap \partial M = c_{n,0}\left([0,1]^{n-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \int_c \mathrm{d}\omega \\
&\overset{\text{lokale Version}}{=} \int_{\partial c} \omega \\
&= \int_{(-1)^n c_{n,0}} \omega \\
&= (-1)^n \int_{c_{n,0}} \omega \\
&\overset{\text{Vergleich von Orientierungen}}{=} (-1)^n(-1)^n \int_{\partial M} \omega \\
&= \int_{\partial M} \omega
\end{aligned}$$

TODO c orientiert $\Rightarrow \underbrace{e_1}_{c_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)}, \dots, \underbrace{e_n}_{c_*\left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)}$ positiv orientiert.

Orientierung auf dem Rand ist aber so definiert, dass $-e_n, e_1, \dots, e_{n-1}$ positiv orientiert sein soll.

Im Allgemeinen

($\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ beliebig)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} \sum_k \varphi_k \cdot \omega \\
&= \sum_k \int_{\partial M} \varphi_k \cdot \omega \\
&\overset{\text{supp}(\varphi_k,\omega) \text{ in } U_{i_k}}{=} \sum_k \int_M \mathrm{d}(\varphi_k \omega) \\
&= \sum_k \int_M \mathrm{d}(\varphi_k \omega) \\
&= \sum_k \int_M \mathrm{d}\varphi_k \wedge \omega + \sum_k \int_M \varphi_k \, \mathrm{d}\omega \\
&= \int_M \mathrm{d} \left(\underbrace{\sum_k \varphi_k}_{=1} \right) \wedge \omega + \int_M \mathrm{d}\omega \\
&= \int_M \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

(weil $\mathrm{d}(1) = 0$)

Korollar

Wenn $\partial M = \emptyset$, $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, gilt

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0$$

Erinnerung:

$$d \circ d = 0$$

$\Rightarrow$ wenn $\eta = \mathrm{d}\omega \Rightarrow \mathrm{d}\eta = 0$, $(\overset{?}{\Leftarrow})$

Definition

$\eta \in \Omega^k(M)$ heißt:

1. geschlossen, wenn $\mathrm{d}\eta = 0$
2. exakt, wenn $\eta = \mathrm{d}\omega$

$\mathrm{d}^2 = 0$ heißt exakt $\Rightarrow$ geschlossen

$\Leftarrow$ gilt im Allgemeinen nicht:

Beispiel

$M = S^1$, $\omega = \mathrm{d}\theta$ (im lokelen Koordinaten)

TODO

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

$\Rightarrow \nexists f \in \Omega^0(S^1)$ mit $\omega = \mathrm{d}f$

Beispiel′

M kompakt, $\dim M = n$, ohne Rand, orientiert, $\omega \in \Omega^n(M)$ Volumenform

$$0 < \int_M \omega, \quad \mathrm{d}\omega = 0$$

weil $\Omega^{n+1}(M) = 0 \Rightarrow \omega$ geschlossen, aber nicht exakt.

Definition

- $B^k(M) := \{\eta \in \Omega^k(M) \mid \eta = \mathrm{d}\omega\}$
- $Z^k(M) := \{\eta \in \Omega^k(M) \mid \eta = \mathrm{d}0\}$

$B^k(M) \nsubseteq Z^k(M)$, $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ heißt (k-te) de Rham-Kohomologie von M

Gestern:

Stokes:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

$$\langle [M], \mathrm{d}\omega \rangle = \langle [\partial M], \omega \rangle$$

Definition: Kozykel

$$Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \mathrm{d}\omega = 0\}$$

heißen *Kozykel* oder *geschlossene Formen*

Definition: Koränder

$$B^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega = \mathrm{d}\eta\}$$

heißen *Koränder* oder *exakte Formen*.

Weil $\mathrm{d}^2 = 0$, gilt $B^k(M) \underbrace{\subseteq}_{\text{i.A.} \neq} Z^k(M)$

$$H^k(M) := Z^k(M)/K^k(M)$$

heißt k-te de Rham-Kohomologie. $H^k(M)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und eine Wichtige Invariante von M.

Proposition

Jedes $f\colon M \to N$ glatt induziert eine lineare Abbildung

$$f^*\colon H^k(N) \to H^k(M)$$

es gilt $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Bemerkung

Sei $f^*\colon \Omega(N) \to \Omega^k(M)$ Pullback von Formen. Wir haben bewiesen, dass $f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega)$, $\forall \omega \in \Omega^k(N)$

Es folgt:

$$\begin{aligned} f^*(Z^k(N)) &\subseteq Z^k(M) \\ f^*(B^k(N)) &\subseteq B^k(M) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f^*$ induziert eine Abbildung $f^*\colon Z^k(N)/B^k(N) \to Z^k(M)/B^k(M)$

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

gilt schon auf Formen.

Korollar

$M \cong N \Rightarrow H^k(M) \cong H^k(N) \quad \forall k \geqslant 0$. Wie berechnet man $H^k(M)$?

- $k = 0$ $H^0(M) = Z^0(M) = \{\varphi \in C^\infty(M) \mid d\varphi = 0\}$

  $$\mathrm{d}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \text{ lokal konstant}$$

  Also wenn M zusammenhängend ist, gilt: $H^0(M) \cong \mathbb{R}$

Definition

$$b_k(M) := \dim_{\mathbb{R}} H^k(M)$$

heißt k-te Bettizahl von M

Beispiel

$M = S^1$, $H^0(S^1) \cong \mathbb{R}$, $H^1(S^1) = ?$, $Z^1(S^1) = \Omega^1(S^1)$, weil $\dim S^1 = 1$

$$B^1(S^1) = \{\omega \in \Omega^1 \mid \omega = \mathrm{d}\varphi\}$$

$$\int_{S^1} \mathrm{d}\varphi \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S^1} \varphi = \int_{\emptyset} \varphi = 0$$

Also gilt:

$$\int_{S^1} : Z^1(S^1) \to \mathbb{R}, \quad \int_{S^1} \supseteq B^1(S^1)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} \int_{S^1} : H^1(S^1) & \to & \mathbb{R} \\ \Cup & & \\ [\omega] & \mapsto & \int_{S^1} \omega \end{array}$$

$$\int_{S^1} (\omega + \mathrm{d}\eta) = \int_{S^1} \omega + \int_{S^1} \underbrace{\mathrm{d}\eta}_{=0} = \int_{S^1} \omega$$

$$\int_{S^1} : H^1(S^1) \to \mathbb{R}$$

ist surjektiv:

$$\int_{S^1} x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x = 2\pi$$

Behauptung:

Es ist auch injektiv, also ist $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$

Beweis:

Haben zu zeigen:

$$\int_{S^1} \omega = 0 \Rightarrow \omega = \mathrm{d}\varphi$$

für eine Funktion φ

TODO

$$\omega = g(\theta)\mathrm{d}\theta$$

in der Karte $(S^1 \setminus \{(1,0)\}, \theta)$

$$\int_{S^1} = \int_0^{2\pi} g(\theta) \,\mathrm{d}(\theta) = 0$$

$$\varphi(\theta) := \int_0^{\theta} g(\theta) \,\mathrm{d}\theta, \quad \varphi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \text{ text}$$

erfüllt $\varphi(2\pi) = \varphi(0) = 0$

$\Rightarrow \varphi$ definiert eine glatte Funktion auf S^1

TODO

Homotopie und Homotopieinvarianz von der de-Rahm-Kohomologie

Definition

Seien M_1, M_2 Mannigfaltigkeiten, f, $g\colon M_1 \to M_2$ glatt Abbildung. f, g heißen (glatt) homotop, wenn

$$\exists H\colon M_1 \times [0,1] \to M_2$$

glatt mit:

$$\begin{aligned} H(p,0) &= f(p) \\ H(p,1) &= g(p), \quad p \in M \end{aligned}$$

Bezeichung:

f homotop zu g

$$f \simeq g$$

Definition

Zwei Mannigfaltigkeiten M, N heißen homotopiäquivalent, wenn $\exists f\colon M \to N$, $\exists g\colon N \to M$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$

Bezeichung:

$$M \simeq N$$

Definition

M heißt zusammenziehbar, wenn $M = \{*\}$

Beispiel

$\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar

$f\colon \mathbb{R}^n \to \{*\}$, konstant, $g\colon \{*\} \to \mathbb{R}^n$, $* \mapsto 0$

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\{*\}}, \quad g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto 0$$

$$H\colon \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, (x,t)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}\colon B(0,1) \times [0,1] \to B(0,1) \\ (x,t) \mapsto (1-t) \cdot \frac{2}{\pi} \arctan(\|\psi(x)\|)\psi(x) \\ (x,t) \mapsto (1-t) \cdot x \end{aligned}$$

Homotopie zwischen $\mathrm{id}_{B(0,1)}$ und $O\colon B(0,1) \to B(0,1)$, $x \mapsto 0$

$B(0,1) \cong \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto x \cdot \tan\left(\|x\| \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2}{\pi}\arctan(\|y\|)y \hookleftarrow y$$

Satz

Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $f, g \colon M \to N$ homotop. Dann gilt

$$f^* = g^* \colon H^k(N) \to H^k(M)$$

Korollar

$M \simeq \{*\} \Rightarrow H^k(M) = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ \mathbb{R}, & k = 0 \end{cases}$

Korollar

S^1 ist nicht zusammenziehbar

Proposition

Sei M eine Mannigfaltigkeit, N eine Mannigfaltigkeit von Dimension k, i_0, $i_1 \colon N \to M$ zwei Einbettungen . Wenn i_1, i_2 homotop sind, gilt:

$$\int_{i_0(N)} \omega = \int_{i_1(N)} \omega$$

für jede geschlossene Form $\omega \in \Omega^k(M)$

Beweis:

Sei $H \colon N \times [0,1] \to M$ eine Homotopie zwischen i_1 und i_2

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{N\times[0,1]} H^*(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_{N\times[0,1]} \mathrm{d}(H^*\omega) \\ &\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial(N\times[0,1])} H^*\omega \\ &= \int_N H_1^*\omega - \int_N H_0^*\omega \\ &= \int_{i_1(N)} \omega - \int_{i_0(N)} \omega \end{aligned}$$

Gaußscher Integralsatz

$M \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet, $\partial M \subset \mathbb{R}^3$ glatt orientiert durch $\nu\colon \partial M \to \mathbb{R}^3$ Normalenfeld

$$\begin{aligned} L &: M \to \mathbb{R}^3 \text{ glattes Vektorfeld} \\ L &= CL_x, Ly, Lz \end{aligned}$$

$$\int_{\partial M} \langle L, \nu \rangle \, \mathrm{d} \underbrace{S}_{\text{Flächenelement}} = \int_M \operatorname{div} L \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$\operatorname{div} L = \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z}$$

Wenn ∂M parametrisiert ist:

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned}$$

$$\int_{\partial M} f(x,y,z) \, \mathrm{d}S := \int_v f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{\det G(u,v)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

$$G(u,v) = (D_{(u,v)}\psi)^T D_{(u,v)}\psi$$

die Gram-Matrix der Koordinatenbasis ($\psi\colon U \to \partial M$, $(u,v) \mapsto (x(u,v)\ldots)$)

$$= \int f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|e_u \times e_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Stokes:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega$$

wollen:

$$\mathrm{d}\omega = \operatorname{div} L \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

$$\omega = L_x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + L_y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z + L_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \frac{\partial L_x}{\partial x} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial L_y}{\partial y} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial L_z}{\partial z} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 0 + \ldots + 0 \\ &= (\operatorname{div} L) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{partialM} \omega &= \int_{\partial M} L_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + L_y \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + L_z \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&\stackrel{?}{=} \int_{\partial M} \langle L, \nu \rangle \,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \int_{\partial M} L_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
= & \int_U L_x(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left[\frac{\partial y}{\partial u} \,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v} \,\mathrm{d}v \right] \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} \,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v} \,\mathrm{d}v \right) \\
= & \int_U L_x(u,v) \underbrace{\left[\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right]}_{(e_u \times e_v)_x} \mathrm{d}u \wedge \,\mathrm{d}v \\
= & \int_U L_x(u,v) \underbrace{\frac{(e_u \times e_v)_x}{\|e_u \times e_v\|}}_{\nu_x} \|e_u \times e_v\| \,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\
= & \int_{\partial M} L_x \nu_x \,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$
A = A_x \,\mathrm{d}x + A_y \,\mathrm{d}y \in \Omega^1(M)
$$

$$
\begin{aligned}
F &:= \mathrm{d}A \\
&= \frac{\partial Ay}{\partial x} \,\mathrm{d}x \wedge \,\mathrm{d}y - \frac{\partial Ax}{\partial y} \,\mathrm{d}x \wedge \,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y} \right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Wenn $F = 0$ ($\Rightarrow A$ geschlossen)

Frage:

- Ist A exakt?
- Äquivalente Fragestellung:

$$
\begin{aligned}
H^1(M) &= \{\text{geschlossene 1-Form }\}/\{\text{ exakt 1-Form }\} \\
&= Z'/B' \\
&= 0?
\end{aligned}
$$

$$
H^1(M) = 0 \Leftrightarrow \text{jede geschlossene 1-Form ist exakt}
$$

$\Rightarrow H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = H^1(S^1) = \mathbb{R}$

Behauptung

$\forall r > 0$ gilt:

$$\int_{\underbrace{\partial B(0,r)}_{r\cdot S^1}} A = \int_{\partial B(0,1)} A$$

TODO

$$N := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|x\| \leqslant r\} \quad (\text{bzw. } r \leqslant \|x\| \leqslant 1)$$

$$\Rightarrow \partial N = (r \cdot S^1) \cup (-S^1)$$

Stokes:

$$0 \overset{\mathrm{d}A=0}{=} \int_N \mathrm{d}A = \int_{r\cdot S'} A - \int_{S'} A$$

Wenn $A = \mathrm{d}f$: $\int_{S'} A = \int_{S'} \mathrm{d}f \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S'} f = \int_\emptyset f = 0$

$\Rightarrow \int_{S^1} A \neq 0 \Rightarrow A$ nicht exakt. (z.B. $A = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$) ist geschlossen, aber nicht exakt

$$T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\underbrace{q^1, \dots, q^n}_{\text{in } \mathbb{R}^n}, \underbrace{p^1, \dots, p^n}_{\text{in } T_q^*\mathbb{R}^n})$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p^i \in \Omega^2(T^*\mathbb{R}^n)$$

1. $\mathrm{d}\omega = 0$
2. $\omega(\underbrace{v}_{\equiv(a,p)\in T^*R^n}) \in \bigwedge^2 T_v^*\mathbb{R}^n = \{\alpha \mid \alpha\colon T_v\mathbb{R}^n \times T_v\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear, schiefsymetrisch $\}$

$$\frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n}, \frac{\partial}{\partial p^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p^n}$$

ist eine Basis von $T_v\mathbb{R}^n$. Wie sieht die Matrix von ω in dieser Basis aus?

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n (e_i^q) \wedge (e_i^p)^* \\ \omega(e_i^q, e_j^q) &= 0 = \omega(e_i^p, e_j^p) \\ \omega(e_i^q, e_j^p) &= \partial_{ij} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \omega$ ist nicht ausgeartet (an jedem Punkt!)

ω nicht ausgeartet $\Rightarrow$ definiert an jedem Punkt einen Isomorphismus

$$\hat{\omega}(v)\colon T_v^*\mathbb{R}^n \to T_v\mathbb{R}^n$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\omega}^{-1}(v)\colon T_v\mathbb{R}^n &\to T_v^*\mathbb{R}^n \\
\chi &\mapsto (\eta \mapsto \omega(v)(\chi, \eta)) \\
\frac{}{q^i} e_i^q &\mapsto (\eta \mapsto \omega(v)(e_q^i, \eta)) = (e_i^p)^* = \mathrm{d}p^i \\
e_i^p &\mapsto -\mathrm{d}q^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{\omega}\colon \Omega^1(T^*\mathbb{R}^n) & \to & \Gamma(T^*\mathbb{R}^n) \\
\Cup & & \\
\alpha & \mapsto & (v \mapsto \hat{\omega}(\alpha(v)))
\end{array}
$$

Für jede Funktion $H \rightsquigarrow X_H := \hat{\omega}(\mathrm{d}H) -$ Vektorfeld auf $T^*\mathbb{R}^n$

Behauptung

Die Differentialgleichungen für den Fluss von X_H

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p^i} \\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}
\end{aligned}
$$

$$M = T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (a, p)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p^i$$

Gestern:

ω ist nicht ausgeartet, $\mathrm{d}\omega = 0$ ($\Leftrightarrow \omega(q, p)$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf TM)

Definition

Ein Paar (M, ω), wobei M eine Mannigfaltigkeit und ω eine nicht ausgeartete geschlossene 2-Form, heißt symplektische Mannigfaltigkeit.

Übung

(T^*N, ω) ist symplektisch für jede Mannigfaltigkeit N

Fakt aus der linearen Algebra: wenn (V, β) ein Vektorraum mit einer nicht ausgearteten Bilinearform β, definiert β

Isomorphismen

$$V \underset{\flat}{\overset{\sharp}{\leftrightarrows}} V^*$$

$$v \mapsto (\omega \mapsto \beta(v, \omega))$$

$\rightsquigarrow$ Musikalische Isomorphismen. (in Koordinaten: $\sharp$ „erhöht“ den Index, $\flat$ „senkt“ den Index)

Wenn jetzt (M, ω) symplektisch ist, bekommt man $\forall m \in M\colon \; T_m M \xrightleftharpoons[\flat]{\sharp} T_m^* M$

und entsprechend

$$\Gamma(TM) \xrightleftharpoons[\flat]{\sharp} \Omega'(M)$$

Gestern in Übung: für $M = T^*\mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^\flat = \mathrm{d}p^i, \quad \left(\frac{\partial}{\partial p^i}\right)^\flat = -\mathrm{d}q^i$$
$$\frac{\partial}{\partial q^i} = (\mathrm{d}p^i)^\sharp - \frac{\partial}{\partial p^i} = (\mathrm{d}q^i)^\sharp$$

Wenn M symplektisch ist, $H \in C^\infty(M)$

$\Rightarrow \mathrm{d}H \in \Omega^1(M) \Rightarrow (\mathrm{d}H)^\sharp \in \Gamma(TM)$

$M = T^*\mathbb{R}^n : \mathrm{d}H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + \mathrm{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p^i}\mathrm{d}p^i\right)$

$$(\mathrm{d}H)^\sharp = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Hamilton-Vektorfeld zu H

Flussgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{p^i} \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Hamilton-Gleichung der Mechanik

Zurück zur Vorlesung

Satz

Sei f, $g\colon M \to N$ glatt, homotop. Dann gilt:

$$f^* = g^*\colon H^k(N) \to H^k(N) \quad (k \in \mathbb{M})$$

Korrolar

$\underset{\text{(Homotopieäquivalenz)}}{M \simeq N} \Rightarrow H^k(N) \cong H^k(M)$ $(k \in \mathbb{N})$

Korrolar

$M \simeq * \Rightarrow H^k(M) \cong \begin{cases} 0, & k > 0 \\ \mathbb{R}, & k = 0 \end{cases}$

(diese Aussage heißt auch Poincaré-Lemma: Jede geschlossene k-Form ($k \geqslant 1$) auf einen zusammenziehbaren Raum ist exakt)

Beweis:

Sei $H\colon M \times [0,1] \to N$ die Homotopie zwischen f, g. Sei $h_t(m) := H(m,t)$, $(h_t\colon M \to N)$, $t \in [0,1]$, $f = h_0$, $g = h_1$

Betrachte jetzt:

$$h_t^*\colon H^k(N) \to H^k(M)$$

Wir wollen zeigen h_t^* ist unabhängig von $t \in [0,1]$.

Dazu: Sei $\omega \in Z^k(N)$ (also $\omega \in \Omega^k(N)$, $\mathrm{d}\omega = 0$)

Betrachte

$$\Omega^k(M \times [0,1]) \ni H^*\omega = \omega_o(t) + \mathrm{d}t \wedge \omega_1(t)$$

mit $\omega_0(t) \in \Omega^k(M)$, $\omega_1(t) \in \Omega^{k-1}(M)$, $t \in [0,1]$

$$\Omega^k(M) \ni h_t^*\omega = i_t^* \circ H^*\omega = \omega_0(t)$$

$(i_t\colon M \cong M \times \{t\} \hookrightarrow M \times [0,1])$

Nun: $\mathrm{d}\omega = 0 \Rightarrow \mathrm{d}H^*\omega = H^*(\mathrm{d}\omega) = 0$

$$0 = \mathrm{d}(H^*\omega)$$

Frage: Was ist $H^k(S^2)$?

TODO brauchen ein Verfahren, wie man aus der Kohomologie von U, V, $U \cap V$ die Kohomologie von $U \cap V$ ausrechnet

Hier beginnt *homologische Algebra*

homologische Algebra

Wir haben bislang zu jeder Mannigfaltigkeit M folgende Sequenz von Vektorräumen konstruiert:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$$

mit $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} (= \mathrm{d}^{n+1} \circ \mathrm{d}^n) = 0$. Jedes $f\colon M \to N$ glatt induziert

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^2(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \dots \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \\ \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \dots \end{array}$$

so dass die Diagramme kommutieren.

$$H^k = \ker \mathrm{d}^n / \operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1} \to \text{Kohomologie}$$

Definition

Ein Kokettenkomplex $(C^n, \mathrm{d}^n)_{n\in\mathbb{N},(n\in\mathbb{Z})} = (C^*, \mathrm{d})$ ist eine Sequenz von Vektorräumen C^n zusammen mit Homoomorphismen

$$\mathrm{d}^{n+1} \circ \mathrm{d}^n = 0$$

erfüllen. ($\Leftrightarrow \mathrm{d}\colon \bigoplus_n C^n \to \bigoplus_n C^n$ hat Grad 1 und erfüllt $\mathrm{d}^2 = 0$)

d^n's heißen Differntiale von C^*

$$H^k(C^*, \mathrm{d}) := \ker \mathrm{d}^{k+1} / \operatorname{Im} \mathrm{d}^k$$

heißt k-te Kohomologiegruppe von C^*.

Beispiel

$(\Omega^*(M), \mathrm{d})$ ist ein Kokettenkomplex

Defition

Eine (Ko-)Kettenabbildung (= Homomorphismus von Kettenkomplexen)

$f^*\colon (C^*, \mathrm{d}) \to (D^*, \mathrm{d})$ ist eine Sequenz

$f^n\colon C^n \to D^n$ von Homomorphismen mit

$$f^n \circ \mathrm{d}^{n-1} = \mathrm{d}^n \circ f^n, \quad b \in \begin{matrix}\mathbb{N}\\ \mathbb{Z}\end{matrix}$$

Beispiel

Jedes $f\colon M \to N$ glatt induziert eine Kettenabbildung $f^*\colon \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$

Definition

Ein Kokettenkomplex $(C^*, \mathrm{d})_{k\in\begin{smallmatrix}\mathbb{N}\\ \mathbb{Z}\end{smallmatrix}}$ heißt exakt (exakte Sequenz) wenn

$H^k(C^*, \mathrm{d}) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$

$$(C^*, \mathrm{d}) \text{ exakt } \Leftrightarrow \ker \mathrm{d}^{n+1} = \operatorname{Im} \mathrm{d}^n$$

Beispiel

Eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen / abelscheen Gruppen ist ein exakter Kokettenkomplex (= exakt Sequenz)

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \big) \, 0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow 0 \, \big(\longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

$$0 \xrightarrow{0} C^0 \xrightarrow[i]{\mathrm{d}^0} C^1 \xrightarrow[q]{\mathrm{d}^1} C^2 \xrightarrow{0} 0$$

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow V/U \longrightarrow 0$$

- 0: $\ker i = \ker \mathrm{d}^0 = \operatorname{Im} 0 = 0 \Leftrightarrow i$ injektiv
- 1: $\ker q = \operatorname{Im} i$
- 2: $C^2 = \ker \mathrm{d}^2 = \ker 0 = \operatorname{Im} \mathrm{d}^1 = \operatorname{Im} q \Leftrightarrow q$ surjektiv

Das heißt: $C^0 \cong i(C^0) \subseteq C^1$, $C^2 \cong C^1/i(C^0)$

Beispiel

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} C^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

exakt $\Leftrightarrow$ d Isomorphismus

Bemerkung

$H^*(C^*, \mathrm{d})$ misst genau, inwiefern (C^*, d) nicht exakt an C^k ist.

Definition: exakt an

Kettenkomplex (C^*, d) ist *exakt an* C^k, $k \in \mathbb{Z}$, wenn $H^k(C^*, \mathrm{d}) = 0$ ($\Leftrightarrow \ker \mathrm{d}^k = \operatorname{im} \mathrm{d}^{k-1}$) (für ein festes k)

Definition: kurze exakte Sequenz

Eine kurze exakte Sequenz von *Cokettenkomplexen* (A_*, d), (B_*, d), (C_*, d) ist eine Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow (A_*, \mathrm{d}) \xrightarrow{i} (B_*, \mathrm{d}) \xrightarrow{q} (C_*, \mathrm{d}) \longrightarrow 0$$

wobei i, q Cokettenabbildungen sind, sodass i injektiv, q surjektiv, $\ker q = \operatorname{Im} i$.

Ist äquivalent zu $\forall k \in \mathbb{Z}$ ist

$$0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{i_k} B_k \xrightarrow{q_k} C_k \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A_k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "i_k"] & A_{k+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "i_{k+1}"] & A_{k+2} \arrow[d, "i_{k+2}"] \\
B_k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "q_k"] & B_{k+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "q_{k+1}"] & B_{k+2} \arrow[d, "q_{k+2}"] \\
C_k \arrow[r, "\mathrm{d}"] & C_{k+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & C_{k+2}
\end{tikzcd}$$

Beispiel

(i_u^* Einschränkung der Form auf U, $\ker q$: Formen die auf $U \cap V$ übereinstimmen)

Sei $M = U \cup V$, U offen, V offen, sodass $U \cap V$ offen. Dann ist

$$0 \longrightarrow \Omega^* M \xrightarrow{i_u^* \oplus i_v^*} \Omega^* U \oplus \Omega^* V \xrightarrow{q} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Cokettenkomplexen ($i_u^* \colon U \hookrightarrow M$, $i_v \colon V \hookrightarrow M$)

$$\begin{aligned} j^u \colon U \cap V &\hookrightarrow U \\ j^v \colon U \cap V &\hookrightarrow V \\ q &= (j^u)^* - (j^v)^* \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow q(\alpha, \beta) = \alpha|_{U \cap V} - \beta|_{U \cap V}$

Satz: Hauptsatz der homologischen Algebra

Sei

$$0 \longrightarrow (A_*, \mathrm{d}) \xrightarrow{i} (B_*, \mathrm{d}) \xrightarrow{q} (C_*, \mathrm{d}) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Cokettenkomplexen. Dann besteht eine lange exakt Sequenz der Cohomologiegruppen:

TODO

$$\begin{tikzcd} H^{k-1}(C_*, \mathrm{d}) \arrow[r, "\mathrm{d}^*"] & H^k(A_*, \mathrm{d}) \arrow[r, "i_*"] & H^k(B_*, \mathrm{d}) \arrow[r, "q_*"] & H^k(C_*, \mathrm{d}) \arrow[dlll, "\mathrm{d}^*"] \\ H^{k+1}(A_*, \mathrm{d}) \arrow[r, "i_*"] & H^{k+1}(B_*, \mathrm{d}) \arrow[r, "q_*"] & H^k(C_*, \mathrm{d}) \arrow[r, "\mathrm{d}^*"] & \dots \end{tikzcd}$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} i_* &\colon H^k(A_*) \to H^k(B_*) \\ q_* &\colon H^k(B_*) \to H^k(C_*) \end{aligned}$$

die durch i, q induzierte Abbildung.

Randabbildung d^* ist eine Abbildung, die durch d induziert ist (wird im Zuge des Beweises konstruiert).

Korollar: Mayer-Vietoris-Sequenz

Sei $M = U \cap V$ und U, V offen sowie $U \cap V$ offen. Dann besteht eine lange kurze exakte Sequenz:

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "\mathrm{d}^*"] & H^k(M) \arrow[r, "i_u^* \oplus i_v^*"] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[dll, "q_*"] \\ H^k(U \cap V) \arrow[r, "\mathrm{d}^*"] & H^{k+1}(M) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Beweis des Satzes:

Wir haben die Randbedingungen d^* zu konstruiren und zu zeigen, dass die Sequenz in der Behauptung exakt ist.

Technik: Diagrammjagt

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
{} \arrow[r] & A_{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & A_k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & A_{k+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & A_{k+2} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
{} \arrow[r] & B_{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & B_k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & B_{k+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & B_{k+2} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
{} \arrow[r] & C_{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & C_k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & C_k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d] & C_{k+2} \arrow[r] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] & \\
{} \arrow[r, mapsto] & {} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \delta' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \beta \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {} \arrow[d, mapsto] \\
{} \arrow[r, mapsto] & \gamma' \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{d}\alpha' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
{} \arrow[r, mapsto] & \gamma \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Wollen:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}^*\colon H^k(C_*) & \to & H^{k+1}(A_*) \\ \Cup & & \\ [\alpha] & \mapsto & [\beta] \end{array}$$

wobei β wie folgt konstruiert ist: $\alpha \in c_k$, $\mathrm{d}\alpha = 0 \Rightarrow \exists \alpha' \in B_k$ mit $q(\alpha') = \alpha$

$q(\mathrm{d}\alpha') = 0$ (Diagramm kommutiert) $\Rightarrow \exists \beta \in A_{k+1}$ mit $i(\beta) = \mathrm{d}\alpha'$

Auch gilt: $(\mathrm{d}\beta) = \mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha') = 0$, i injektiv $\Rightarrow \mathrm{d}\beta = 0$

Konstruktion β zu ende.

d^* ist wohldefiniert, denn wenn $\alpha_1 = \alpha + \mathrm{d}\gamma$, dann kann man

$$\alpha_1' = \alpha' + \mathrm{d}\gamma'$$

Wählen, wobei $\gamma' \in B_{k-1}'$ mit $q(\gamma') = \gamma$ ein Lift von γ (existiert, weil q surjektiv)

$$\rightsquigarrow \mathrm{d}\alpha_1' = \mathrm{d}\alpha' \checkmark$$

1. ? TODO
2. Wenn $\alpha'' \in B_k$ ein anderer Lift von α (Elemente mit $q(\alpha'') = \alpha$) Dann gilt:

$$\alpha'' - \alpha' = i(\mathrm{d}\delta') \Rightarrow \mathrm{d}\alpha' = i(\beta + \mathrm{d}\delta')$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \mathrm{d}\alpha'' - \mathrm{d}\alpha' = i(\mathrm{d}\delta') \Rightarrow \mathrm{d}\alpha' = i(\beta + \mathrm{d}\delta') \\
&\Rightarrow \quad [\beta + \mathrm{d}\delta'] = [\beta]
\end{aligned}$$

Haben jetzt zu zeigen: exakte Sequenz

- $q_* \circ i_* = (q \circ i)_* = 0$
- $\mathrm{d}_* \circ q_*[\alpha'] = \mathrm{d}^*([\alpha]) = 0$, weil $\mathrm{d}\alpha' = 0$ weil α' geschlossene Form. anderes α' als oben, aber auch aus B_k
- $(i_* \circ \mathrm{d}^*)([\alpha]) = [i(\beta)] = [\mathrm{d}\alpha'] = 0$

(hier fangen wir mit geschlossenen Formen α' an und puschen das runter)

$\Rightarrow$ die Sequenz ist ein Cokettenkomplex

zu zeigen:

- $\ker i_* \subseteq \operatorname{im} \mathrm{d}^*$
- $\ker q_* \subseteq \operatorname{im} i_*$
- $\ker d^* \subseteq \operatorname{im} q_*$

$$\beta \longmapsto 0$$

$$\begin{tikzcd}
A_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & A_k \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & A_{k+1} \arrow[d] \\
B_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & B_k \arrow[r] \arrow[d] & B_{k+1} \arrow[d] \\
C_{k-1} \arrow[r] & C_k \arrow[r] & C_{k+1}
\end{tikzcd}$$

erster Punkt

Sei $[\beta] \in \ker i_*$ ($\beta \in A_k$, $\mathrm{d}\beta = 0$)

$\Rightarrow i(\beta) = \mathrm{d}\gamma$

Sei $q(\gamma) =: \gamma'$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\gamma' = q(\mathrm{d}\gamma) = q(\beta') = q(i(\beta)) = 0 \\
\Rightarrow [\gamma'] \in H^{k-1}
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt $\mathrm{d}^*[\gamma'] = [\beta]$

zweiter Punkt: Übung

$$\begin{tikzcd}
A_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & A_k \arrow[r] \arrow[d] & A_{k+1} \arrow[d] \\
B_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_k \arrow[r] \arrow[d] & B_{k+1} \arrow[d] \\
C_{k-1} \arrow[r] & C_k \arrow[r] & C_{k+1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \gamma \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \beta \arrow[d, mapsto] \\
{} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \alpha' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{d}\alpha \arrow[d, mapsto] \\
{} \arrow[r, mapsto] & \alpha \arrow[r, mapsto] & {}
\end{tikzcd}$$

Sei $\alpha \in \ker \mathrm{d}^* \Rightarrow \beta = \mathrm{d}\gamma$

$$\mathrm{d}(\alpha' - i(\gamma)) = \mathrm{d}\alpha' - \underbrace{i(\underbrace{\mathrm{d}\gamma}_{=\beta})}_{\mathrm{d}\alpha'} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad [\alpha' - i(\gamma)] \in H^k(B_*), \quad q(\alpha' - i(\gamma)) = q(\alpha') = \alpha$$

$\Rightarrow \alpha \in \operatorname{im} q_*$

TODO TODO$\leftarrow$ Spalten exakt ($\ker i = \operatorname{Im} q$, i injektiv, q surjektiv)

Sei $[\alpha] \in H^k(B_*)$ mit $q_*([\alpha]) = 0$

D.h. $\alpha' := q(\alpha) = \mathrm{d}\beta$, q surjektiv $\Rightarrow \exists \beta'$ mit $q(\beta') = \beta$

$$q''(\mathrm{d}\beta') = \mathrm{d}(q(\beta')) = \mathrm{d}\beta = \alpha' = q(\alpha) \Rightarrow q(\alpha - \mathrm{d}\beta') = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - \mathrm{d}\beta' = i(\gamma)$$

$$i(\mathrm{d}\gamma) = \mathrm{d}(i(\gamma)) = \mathrm{d}(\alpha - \mathrm{d}\beta') = \mathrm{d}\alpha = 0, \; i \text{ injektiv}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\gamma = 0 \Rightarrow [\gamma] \in H^k(A_*)$$

$$i_*[\gamma] = [i(\gamma)] = [\alpha - \mathrm{d}\beta'] = [\alpha] \Rightarrow [\alpha] \in \operatorname{Im} i_*$$

Korollar: (Mayer-Vietoris Sequenz)

$M = U \cup V$, beide offen, $U \cap V$ offen

$\Rightarrow \exists$ l.e.S

TODO

Proposition (Kohomologie von Sphären)

Sei

$$S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$$

die d-dimensionale Sphäre. Dann gilt:

$$H^k(S^d) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \text{ oder } k = d \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Induktion

$d = 1$ haben wir es schon ausgerechnet. Induktionsvoraussetzung. Sei die Behauptung richtig für Sphären von Dimension $\leqslant d - 1$

TODO

$$S^d = U \cup V, \quad V = \left\{x \in S^d \;\middle|\; x_{d+1} > -\frac{1}{2}\right\}, \quad V = \left\{x \in S^d \;\middle|\; x_{d+1} < \frac{1}{2}\right\}$$

$$U \cap V \simeq S^{d-1}, \quad U, V \cong \{*\}, \quad \text{explizite Homotopien - Übung}$$

Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\longrightarrow H^k(S^d) \longrightarrow \underbrace{H^k(V)}_{=0} \oplus \underbrace{H^k(V)}_{=0} \longrightarrow H^k(S^{d-1}) \longrightarrow H^{k+1}(S^d) \longrightarrow \underbrace{H^{k+1}(V) \oplus H^{k+1}(V)}_{=0} \longrightarrow$$

$(k \geqslant 1)$

$\Rightarrow$

$$0 \longrightarrow H^k(S^{d-1}) \longrightarrow H^{k+1}(S^d) \longrightarrow 0$$

ist exakt $\Rightarrow$

$$H^k(S^{d-1}) \cong H^{k+1}(S^d) \quad (k \geqslant 1)$$

Für $k = 0$ folgt die Aussage, da S^d zusammenhängend ist.

Situation: M Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ Mannigfaltigkeit. Möchte die Zerlegung betrachten $M = N \cup (M \setminus N)$, N abgeschlossen, M offen.

Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit,

$$\Omega_c^k(M) := \{\omega \in \Omega(M) \mid \operatorname{supp} \omega \, \text{kompakt}\}$$

Bemerkung

M kompakt $\Rightarrow \Omega_c^k(M) = \Omega^k(M)$

Beweis

$$\omega \in \Omega_c^k(M) \Rightarrow \mathrm{d}\omega \in \Omega_c^{k+1}(M)$$

D.h. $((\Omega_c^*(M), \mathrm{d})$ ist auch ein Kokettenkomplex)

$$\rightsquigarrow H_c^k(M) := H^k\left((\Omega_c^*(M), \mathrm{d})\right)$$

heißt Kohomologie von M mit kompakten Träger.

Wiederum:

$$M \text{ kompakt } \Rightarrow H^d(M) = H_c^k(M) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, $i\colon N \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung,

$$i^*\colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(N), \quad k \in \mathbb{N}$$

die induzierte Abbildung auf Formen (= Einschränkung auf N), $\ker i^* =$ besteht aus Formen, die auf N verschwinden, i^* surjektiv

$\Omega^*(M, N) := \{\omega \in \Omega^*(M) \mid i^*\omega = 0\}$

$0 \longrightarrow \Omega^*(M, N) \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(N) \longrightarrow 0$

$\uparrow$ ist eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen

$\Rightarrow$ erhalten eine lange exakte Sequenz

$H^k(M, N) := H^k(\Omega^*(M, N)) =$ Kohomologie von M relativ zu N, relative Kohomologie von M bzgl. N

$\ldots \longrightarrow H^k(M, N) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(N) \longrightarrow H^{k+1}(M, N) \longrightarrow \ldots$

Problem

$H^k(M, N)$ ist mysteriös :-(.

Lösung: gibt's für N kompakt, was wir ab jetzt annehmen

TODO TODO

Beweis

$\Omega_c^*(M \setminus N) \subseteq \Omega^*(M, N)$

Setze $C^k := \Omega^k(M, N)/\Omega_c^k(M \setminus N)$

$\rightsquigarrow$ kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen

TODO $\Rightarrow$ l.e.S.

TODO

Proposition $H^k(C^*) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$(\Rightarrow H^k_c(M \setminus N) \cong H^k(M, N))$

Beweis

Wir werden die folgende Zusatzaussage benutzen (Existenz einer tubularen Umgebung), wenn N kompakt ist, dann $\exists T \subseteq M$ offen, $N \subseteq T$ und so dass

$N \xhookrightarrow{\sim} T$

eine Homotopieäquivalenz

Sei $[\omega] \in C^k$ mit $[\mathrm{d}\omega] = \mathrm{d}[\omega] = 0 \in C^{k+1}$

$\Rightarrow \mathrm{d} = \eta \in \Omega^{k+1}_c(M \setminus N)$

Wollen: $[\omega] = \mathrm{d}[\sigma]$, also wollen wir ein $\sigma \in \Omega^{k-1}(M, N)$ finden, sodass $\mathrm{d}\sigma - \omega \in \Omega^k_c(M \setminus N)$

Aus der Vorraussetzung an T folgt: $\exists p \colon T \to N$, die eine Homotopieäquivalenz ist (sogar mit $p|_N = \mathrm{id}$)

Betrachte jetzt die Form $\omega - p^*\omega$ auf T, da $N \simeq T$, gilt $H^k(T, N) = 0$, und deswegen ist $\omega - p^*\omega$ exakt, also

$$\exists v \in \Omega^{k-1}_c(T, N)$$

mit $\omega - p^*\omega = \mathrm{d}v$. Nun gilt:

$$p = i \circ p \Rightarrow p^* = p^* \circ i^*$$

folglich gilt $p^*\omega = p^* \circ i^*(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \mathrm{d}v$

Sei $\varphi \in C^\infty(M, [0, 1])$ eine Funktion mit:

$\varphi \equiv 1$ auf einer Umgebung von N, $\varphi \equiv 0$ auf $M \setminus T$

Dann gilt: $\varphi \colon v \in \Omega^{k-1}(M, N)$, $\omega - \mathrm{d}(\varphi v) \in \Omega^k_c(M \setminus N)$

$\Rightarrow \sigma = \varphi v$ funktioniert und der Beweis ist fertig.

$N \subseteq M$ Untermannigfaltigkeit, N kompakt

$\Rightarrow$ l.e.S.

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow H^k(M, N) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(N) \longrightarrow H^{k+1}(M, N) \longrightarrow \dots$$

$$\cong \qquad\qquad\qquad\qquad \cong$$

$$H^{k+1}_c(M \setminus N)$$

Proposition

$$H^k_c(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \mathbb{R}, & k = n \end{cases}$$

Beweis:

- $k = 0$

$$H^0_c(\mathbb{R}^n) \cong 0$$

weil es keine kompakt getragenen konstanten Funktionen gibt. (für alle $n \in \mathbb{N}$)

- $n = 1$, $k = 1$

$$H^1_c(\mathbb{R}) \cong \ker \mathrm{d} / \operatorname{im} \mathrm{d} = \Omega^1_c(\mathbb{R}) / \operatorname{im} \mathrm{d}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0_c(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1_c(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & 0 \\ \parallel & & & & \\ C^\infty_c(\mathbb{R}) & & & & \end{array}$$

Sei $\omega = \varphi(x)\,\mathrm{d}x \in \Omega^1_c(\mathbb{R})$. $\omega \in \operatorname{im} \mathrm{d} \Leftrightarrow \omega = \mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ für ein $f \in C^\infty_c(\mathbb{R})$

TODO Bildchen

$$f(x) = \int_\alpha^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow f(\beta) = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
$$[\alpha, \beta] \supseteq \begin{matrix} \operatorname{supp} \varphi \\ \operatorname{supp} f \end{matrix}$$

Aus der Rechnung folgt: f kompakt getragen

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} = \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \omega = 0$$

Also:

$$\omega \in \operatorname{im} \mathrm{d} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \omega = 0$$

Wir haben also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^\infty_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^1_c(\mathbb{R}) \xrightarrow{\int_{\mathbb{R}}} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow H^1_c(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

- Für $n \geqslant 2$ benutzen wir Induktion und die l.e.S für $M = S^n$, $N = S^{n-1}$, $M \setminus N \cong \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^n$. $M \setminus N$ sind zwei Kreisscheiben $\Rightarrow S^1 \cup S^1 \cong \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^n$

$$\longrightarrow H^k_c(M \setminus N) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(N) \longrightarrow H^{k+1}_c(M \setminus N)$$

Anfang: $k = 0$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[\mathrm{id}]{\cong} \mathbb{R} \xrightarrow{0} H^1_c(\mathbb{R})\bigoplus{}^2 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^2_c(\mathbb{R}^n)\bigoplus{}^2 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

$$\dots \xrightarrow{0} H^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)\bigoplus{}^2 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^n_c(\mathbb{R}^n)\bigoplus \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Am Ende steht:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^n_c(\mathbb{R}^n)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

exakt.

$\Rightarrow H^n_c(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, weil

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow \underbrace{V'}_{\cong W/V} \longrightarrow 0$$

kurze exakt Sequenz $\Rightarrow$ $\dim W = \dim V + \dim V'$ $(V' \cong W \setminus V)$ und $2 \dim H^n_c(\mathbb{R}^n) = 1 + 1 = 2$

Bemerkung

$$H^n_c(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \cdot [\omega]$$

wobei $\omega = \varphi(\|x\|)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$ mit φ: TODO Bilchen

Satz

Sei M eine kompakte, zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Dann gilt:

$$H^n(M) \cong \mathbb{R}, \quad n = \dim M$$

Beweis: Erinnerung: wenn ω eine Volumenform $\Rightarrow \int_M \omega \neq 0$, andereseits: wenn $\omega = \mathrm{d}\alpha \in \Omega^n(M)$

$$\Rightarrow \int_M \omega = \int_M \mathrm{d}\alpha = \int_\emptyset \alpha = 0, \quad \in \Omega^n(M)$$

Da M kompakt, $\exists\, \{U_i\}_{i=1}^N$ eine offene Überdeckung mit untergeordneter Teilung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ sodass $U_i \cong \mathbb{R}^n$.

Definiere die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Psi\colon \Omega^n(M) & \to & \mathbb{R}^N \\ \cup & & \\ \omega & \mapsto & \left(\int_M \varphi_1 \cdot \omega, \ldots, \int_M \varphi_N \cdot \omega\right) \end{array}$$

Ψ linear:

$$V := \{\psi(\mathrm{d}\alpha) \mid \alpha \in \Omega^{n-1}(M)\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

Untervektorraum

Behauptung:

$$\Psi(\omega) \in V \Leftrightarrow \omega \text{ exakt}$$

$\Leftarrow$ Definition von V

$\Rightarrow$ $\Psi(\omega) \in V \Rightarrow \exists \alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ mit $\Psi(\omega - \mathrm{d}\alpha) = 0$

$\int_{U_i} \varphi_i \cdot (\omega - \mathrm{d}\alpha) = \int_M \varphi_i \cdot (\omega - \mathrm{d}\alpha) = 0$, $i = 1, \ldots, N$

$U_i \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi_i \cdot (\omega - \mathrm{d}\alpha)$ exakt (nach vorheriger Proposition)

$\Rightarrow \exists \alpha_i \in \Omega_c^{n-1}(U_i)$ mit $\rho_i \cdot (\omega - \mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\alpha_i$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^{N} \rho_i \cdot \omega \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\rho_i \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha_i) \\ &= \mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\alpha_i \\ &= \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \omega$ exakt

Nun ist $V \subset \mathbb{R}^N$ durch ein LGS gegeben:

$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; C \cdot x = 0\right\}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times N}$$

Das heißt:

$$\begin{aligned} \omega \text{ exakt} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} c_{jk} \int_M \rho_k \cdot \omega = 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ &= \quad \sum_{k=1}^{N} \int_M c_{jk} \rho_k \cdot \omega = 0 \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{N} c_{jk} \rho_k$$

ist eine konstante Funktion $\forall j = 1, \ldots, m$:

Wenn nicht:

$$\exists i \in \{1, \dots, N\} \exists \omega \in \Omega^n_c(U_i)$$

so dass

$$\int_M \omega = 0$$

aber

$$\int \sum_{k=1}^{N} c_{jk} \rho_k \omega = \int_{U_i} c_{ji} \rho \varphi_i \omega \neq 0$$

$\Rightarrow \omega$ nicht exakt $\lightning$

Also: $\sum_{k=1}^{N} c_{jk} \rho_k$ ist konstant für jedes $j = 1, \dots, m$. $\rightsquigarrow \omega \in \Omega^n(M)$ ist exakt

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{N} \int_M c_{jk} \rho_k \omega = 0, \quad j = 1, \dots, m \\
= \quad & \int_M \underbrace{\left(\sum c_{jk} \rho_k \right)}_{\text{konstant}} \omega = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \omega = 0
\end{aligned}$$

Metrische Strukturen auf Mannigfaltigkeiten

Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Riemansche Metrik auf M ist eine symetrische positiv definite Bilinearform $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ Das heißt $\forall p \in M$ ist $g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M \cong \mathrm{Bil}(T_pM)$ mit g_p ist ein Skalarpodukt

Pseudo-Riemansche Metrik: das Gleiche mit „nicht ausgeartet“ statt „pos. definit“/„Skalarpodukt“

Tensoralgebra im Präsenz von g

1. Da g nicht ausgeartet ist, definiert es musikalische Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\flat \colon TM &\to T^*M \\
\sharp \colon T^*M &\to TM \\
v^\flat(\omega) &:= g(v, w), \quad v, w \in T_pM \\
\sharp &= \flat^{-1}
\end{aligned}$$

Beispiel: $f \in C^\infty(M)$, $\mathrm{grad}(f) := (\mathrm{d}f)^\sharp$

2. $*$-Operation auf Differentialformen Erinnerung:

$$B_x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \ldots$$

$$[*(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k})] \wedge (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}) = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

z.B.:

$$*(B_x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = B_x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} X &\in \Gamma(T\mathbb{R}^3) \\ X^\flat &\in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \\ \mathrm{d}X^\flat &\in \Omega^2(\mathbb{R}^3) \\ *\mathrm{d}X^\flat &\in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \\ \operatorname{rot} X &= (*\mathrm{d}X^\flat)^\sharp \end{aligned}$$

Riemansche Mannigfaltigkeit (M, g),

$$g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$$

ein Skalarpodukt auf T^*M

1. g induziert „musikalische Isomorphismen"

$$\flat\colon TM \to T^*M$$
$$\sharp\colon T^*M \to TM$$

2. Hodge-Stern-Operator Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein orientierter euklidischer Vektoraum
   - $\flat\colon V \to V^*$ ist ein Isomorphismus, V^* auch orientiert (durch Dualbasen bzw. durch $\flat$)

Wenn nun $n = \dim V \Rightarrow \bigwedge^n V^* \cong \mathbb{R}$; sei nun $e_1^*, \ldots, e_n^*$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis in V^*.

$$\mathrm{vol} = \omega := e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^* \in \bigwedge^n V^*, \quad \omega \neq 0, \text{weil } e_1^*, \ldots, e_n^*$$

eine Basis (Volumenform auf V)

Beweis:

ω hängt nicht von der Wahl einer positiv orientierten Orthonormalbasis (ONB) in V^* ab.

Dazu sei $f_1^*, \ldots, f_n^* \in V^*$ eine andere positiv orientierte Orthonormalbasis.

$$\begin{aligned} f_1^* \wedge \ldots \wedge f_n^* &= \underbrace{\det M_F^\xi}_{\in SO(u),\text{ weil } \xi, F'\text{ONB, gleich orientiert}} \cdot e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^* \\ \Rightarrow \det M_F^\xi &= 1 \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation:

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \underbrace{\pm}_{\text{je nach Orientierung}} \mathrm{vol}(Spat)$$

Wir definieren jetzt einen Operator

$$*\colon \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{n-k} V^*$$

Dazu: $\flat$, $\sharp$ induzieren auch Isomorphismen

$$\flat\colon \bigwedge^k V \to \bigwedge^k V^* \sharp\colon \bigwedge V^* \to \bigwedge^k V$$

Dies definiert ein Skalarpodukt auf $\bigwedge^k V^*$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \alpha(\beta^\sharp)$$

Explizit: wenn $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$, $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \alpha(\beta^\sharp) \\ &= \det(\alpha_i(\beta_j^\sharp))_{i,j=1}^k \\ &= \det(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle_{V^*})_{i,j=1}^k \\ &= \det(\langle \alpha_i^\sharp, \beta_j^\sharp \rangle_V)_{i,j=1}^k \end{aligned}$$

$*\colon \bigwedge^k V^* \to \bigwedge n - kV^*$ ist jetzt eindeutig durch folgende Eigenschaft bestimmt: $\forall \alpha, \beta \in \bigwedge^k V^*$ gilt

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \omega = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathrm{vol}$$

Explizite Formel für $*$: sei $e_1^*, \ldots, e_n^*$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis. Es gilt:

$$\langle e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*, e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* \rangle = \det E = 1$$

Es muss dann gelten:

$$\left(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*\right) \wedge * \left(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*\right) = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$$

Beispiel

$$\dim V = 4, \quad e_1^*, \ldots, e_4^* \quad ONB \text{ in } V^*$$

$$
\begin{aligned}
* \underbrace{1}_{\in \bigwedge^0 V^*} &= e_1^* \wedge \ldots \wedge e_4^* \\
*e_1^* &= e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \\
*e_2^* &= -e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \\
*(e_1^* \wedge e_2^*) &= e_3^* \wedge e_4^* \\
*(e_2^* \wedge e_3^*) &= e_1^* \wedge e_4^*
\end{aligned}
$$

Wenn (M, g) eine orientierte Riemansche Mannigfaltigkeit ist, ist $(T_pM, g(p))$ ein orientierter euklidischer Vektoraum. $\Rightarrow$ Wir kriegen automatisch eine Volumenform $\mathrm{vol} \in \Omega^n(M)$, $n = \dim M$. ($\mathrm{vol}(p) = \mathrm{vol}_{T_pM} = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$), wir bekommen auch den Hodge-Sternoperator

$$
\begin{aligned}
*\colon \quad & \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M) \\
: \quad & \alpha \mapsto (p \mapsto *_p(\alpha(p))) \\
*_p\colon \quad & \bigwedge^k T_p^*M \to \bigwedge^k T_p^*M
\end{aligned}
$$

D.h. auf einer Riemanschen Mannigfaltigkeit kann man einfach Funktionen integrieren

$$
\int_M f \text{ könnte man durch } \int_M f \cdot \mathrm{vol} \, \text{definieren}
$$

Dieses Integral kann man zur Aufstellung der Maßtheorie auf M benutzen $\rightsquigarrow$ jede Riemansche Mannigfaltigkeit trägt ein kanonisches positives Maß.

Expliziter Ausdruck für vol: wenn (U, x) eine Karte auf M ist, bekommen wir durch eine Riemansche Metrik auf $x(U)$ (= Ausdruck von g in Koordinaten):

$$
g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)
$$

sind Einträge der Gram-Matrix von g in der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$

Wenn $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ positiv orientiert ist,

$$
\mathrm{vol}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \overset{\text{LAAG}}{=} \sqrt{\det(g_{ij})_{i,j=i}^n} =: \sqrt{g}
$$

Der Hodge-Operator definiert ein Skalarpodukt auf $\Omega^k(M)$:

$$
\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \alpha \wedge *\beta = \int_M \langle \alpha(p), \beta(p) \rangle_{\bigwedge^k T_p^*M} \mathrm{vol}
$$

Durch Vervollständigung von $\Omega_c^k(M)$ bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bekommen wir einen Hilbertraum

$$
L^2\left(\bigwedge^k T^*M\right) \text{ oder } \Omega_{(2)}^k(M)
$$

Somit wird $\mathrm{d}\colon \Omega_c^k(M) \to \Omega_c^{k+1}(M)$ zu einem Operator zwischen Räumen mit Skalarpodukt.

Idee: studiere den adjungierten Operator $\mathrm{d}^*\colon \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$. d^* (wenn es existiert) muss durch die Bedingung

$$\langle \mathrm{d}\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \mathrm{d}^*\beta \rangle$$

eindeutig festgelegt sein.

Beispiel

$M = S^1$, $C^\infty(S^1) = \Omega^0(S^1) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(S^1)$

$$\mathrm{d}f = f'(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}f, \underbrace{\alpha}_{\alpha(\theta)\mathrm{d}\theta} \rangle &= \int_{S^1} f'(\theta)\alpha(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\overset{\text{positiv orientiert}}{=} -\int_{S^1} f(\theta)\alpha'(\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$:= \ldots \langle f, \mathrm{d}^*\alpha \rangle \Rightarrow (\mathrm{d}^*\alpha)(\theta) = -\alpha'(\theta)$

Lemma

Sei $\mathrm{d}\colon \Omega_c^k(M) \to \Omega_c^{k+1}(M)$ das Differential. Der adjungierte Operator $\mathrm{d}^* = \delta$ ist gegeben durch

$$\mathrm{d}^* = (-1)^{k+1} *^{-1} \circ \mathrm{d} \circ *$$

[Beachte $*^2 = \pm\,\mathrm{id}$, $\pm$ hängt von n, k ab]

Beweis

Seien $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega_c^{k+1}(M)$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}\alpha, \beta \rangle &= \int_M \mathrm{d}\alpha \wedge *\beta \\
&= \int_M \mathrm{d}(\alpha \wedge *\beta) - (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}(*\beta) \\
&\overset{\text{Stokes}}{=} 0 + (-1)^{k+1} \int_M \alpha \wedge *(*^{-1}\mathrm{d} * \beta) \\
&= \left\langle \alpha, (-1)^{k+1} *^{-1} \mathrm{d} * \beta \right\rangle
\end{aligned}$$

Definition

Der Laplace-Operator auf $\Omega^k(M)$ ist definiert durch

$$\Delta = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*$$

$\Omega^o \underset{\mathrm{d}^*}{\overset{\mathrm{d}}{\rightleftarrows}} \Omega^1 \underset{\mathrm{d}^*}{\overset{\mathrm{d}}{\rightleftarrows}} \Omega^2 \underset{\mathrm{d}^*}{\overset{\mathrm{d}}{\rightleftarrows}} \ldots$

Lemma:

Δ erfüllt

1. Δ ist symetrisch, positiv semidefinit:
2. Δ kommutiert mit d und d^*
3. $\ker\Delta = \ker \mathrm{d} \cap \ker \mathrm{d}^*$
4. $\ker\Delta = \ker \mathrm{d} \cap (\operatorname{im} d)^1$

Beweis:

1. $\Delta^* = (\mathrm{d}^*\mathrm{d})^* + (\mathrm{d}\mathrm{d}^*)^* = \Delta$, $\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle = \langle \mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\alpha\rangle + \langle \mathrm{d}^*\alpha, \mathrm{d}^*\alpha\rangle \geqslant 0$
2. $\mathrm{d}\Delta = \mathrm{d}\mathrm{d}^*\mathrm{d} = \Delta\mathrm{d}$ wegen $\mathrm{d}^2 = 0$, analog für d^*
3. „ $\supseteq$ “ $\to$ Definition

   „ $\subseteq$ “ $\Delta\mathrm{d} = 0 \Rightarrow \langle \Delta\alpha, \alpha\rangle \Rightarrow \mathrm{d}\alpha = 0$, $\mathrm{d}^*\alpha = 0$
4. drittens + Eigenschaft des adjungierten Operators

Proposition

Die Quotientenabbildung $\ker \mathrm{d} \twoheadrightarrow \ker / \operatorname{Im} \mathrm{d} = H^k M$ induziert eine injektive Abbildung $\mathcal{H} \hookrightarrow H^k M$. Wenn $\mathcal{H}$ endlichdimensional, ist es sogar ein Isomorphismus.

Beweis

- $\omega \in \mathcal{H}$ mit $[\omega] = 0 \in H^k M \Rightarrow \omega = \mathrm{d}\alpha$, $\omega \underbrace{\perp}_{3)+4)} \mathrm{d}\alpha \Rightarrow \omega = \mathrm{d} = 0$

  Wenn $\mathcal{H}$ endlich dimensional und $\Delta|_{\mathcal{H}^\perp}$ invertierbar, hat $\mathcal{H}$ ein orthogonales Komplement in Ω^k: $\Omega^k = \mathcal{H} \oplus f$

  $$\mathrm{d}|_{\mathcal{H}} = \mathrm{d}^*|_{\mathcal{H}} = 0$$

  $\Rightarrow \mathrm{d}^*\mathrm{d}$, $\mathrm{d}\mathrm{d}^*$ erhalten f, ($\mathrm{d}^*\mathrm{d}(f) \subseteq f$, $\mathrm{d}\mathrm{d}^*(f) \subseteq f$): $\Delta(f) \subseteq f$

  $$\begin{array}{ccccc} \Omega^k & = & \mathcal{H} & \oplus & f \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & {\scriptstyle 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta|_f} \\ \Omega^k & & \mathcal{H} & \oplus & f \end{array}$$

  $\Delta|_f$ ist ein Isomorphismus nach Vorraussetzung

  - Sei $[\omega] \in H^k M$, $\omega = \underbrace{\omega_1}_{\in\mathcal{H}} + \underbrace{\omega_2}_{\in\mathcal{H}}$, $0 = \mathrm{d}\omega = \underbrace{\mathrm{d}\omega_1}_{=0} + \mathrm{d}\omega_2$

    $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mathrm{d}\omega_2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \omega_2 \in \ker \mathrm{d}, \quad \ker \mathrm{d}|_f \cap (\operatorname{Im} \mathrm{d}|_f)^\perp = 0 \\ &\Rightarrow \quad \omega_2 \in \mathrm{d} \Rightarrow \omega_2 = \mathrm{d}\alpha \\ &\Rightarrow \quad \omega = \omega_1 + \mathrm{d}\alpha \Rightarrow [\omega] = [\omega_1] \\ &\Rightarrow \quad \text{die Abbildung von } \mathcal{H} \text{ nach } H^k M \text{ ist surjektiv} \end{aligned}$$

Satz: (Hodge)

Wenn M kompakte Mannigfaltigkeit, so ist der Laplace-Operator

$$\Delta \colon \Omega^k M \to \Omega^k M$$

elliptisch.

$\Rightarrow$ Es hat diskretes Spektrum und die Eigenräume sind endlichdimensional, insbesondere erfüllt es die Vorraussetzung der Proposition.

Beweis von „insbesondere“:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \ker\Delta = \text{ Eigenraum zum Eigenwert } 0 \\
\mathcal{H}^\perp &= \bigoplus_{\lambda\neq 0} \mathrm{Eig}(\lambda) \\
\Delta^{-1}|_{\mathcal{H}^\perp} &= \bigoplus_{\lambda\neq 0} \frac{1}{\lambda} \operatorname{id}|_{\mathrm{Eig}\,\lambda}
\end{aligned}$$

Korrolar

Für kompaktes M gilt $\ker\Delta_k \cong H^k M$.

$\rightsquigarrow$ „Can you hear the shape of a drum?“

Frage:

Seien M_1, M_2 zwei kompakte Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_i^*\mathrm{d}_i &= \Delta_i \colon C^\infty M \to C^\infty M, \quad \text{Laplace-Operator auf Funktionen} \\
\mathrm{sp}(\Delta_i) &= \{x_k\}_{k=j}^\infty \subset [0,\infty), \quad (i = 1, 2)
\end{aligned}$$

Wenn $\mathrm{sp}(\Delta_1) = \mathrm{sp}(\Delta_2) \overset{?}{\Rightarrow} M_1 \cong M_2$, als Riemansche Mannigfaltigkeit?

TODO Bildchen

Weyl's Abschätzung: $\lambda_n = O(k^{\frac{1}{n}})$, $n = \dim M$

Levi-Civita-Zusammenhang, Krümmung

Erinnerung

$M \subseteq (\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{st}})$ Untermannigfaltigkeit, g_{st} Riem.

$\Rightarrow (M, g_{\mathrm{st}}|_M =: g)$ Riemansche Mannigfaltigkeit

Damals: Wir erhalten einen Zusammenhang auf TM, also einen Operation

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y \in \Gamma(TM)$$

für X, $Y \in \Gamma(TM)$

Erkenntniss: $\nabla_X Y$ konnte man in reinen Termen der Metrik und der Lie-Klammer ausdrücken:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) \\ &- Z(g(X,Y))) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) \\ &- g(X[Y,Z]) \end{aligned}$$

Dies ist gültig für jede Riemansche Mannigfaltigkeit.

Definition: Zusammenhang

Ein Zusammenhang auf M ist eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla\colon \Gamma(TM) &\to \Gamma(T^*M \otimes TM) = \mathrm{End}(TM) \\ Y &\mapsto \nabla Y \\ \nabla XY &:= (\nabla Y)(X) \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

welche die Leibnitzregel erfüllt:

$$\nabla(fY) = f \cdot \nabla Y + \mathrm{d}f \otimes Y, \quad f \in C^\infty M$$

∇ heißt:

- torsionsfrei, wenn $\nabla_X Y - \nabla Y X = [X,Y]$
- metrisch, wenn $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, X, Y, $Z \in \Gamma(TM)$

Haupsatz der Riemannschen Geometrie

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gibt einen endlichen Zusammenhang (torsionsfrei, metrisch) auf M, der durch $(*)$ gegeben ist. Er heißt Levi-Civita-Zusammenhang

Beweis

siehe Wintersemester + setze gegebenenfalls $(*)$ ein. (Existenz) + Herleitung von $(*)$ (Eindeutigkeit)

Mit Levi-Civita-Zusammenhang kann man den Riemannschen Krümmungstensor definieren.

Wenn

$$\begin{aligned} \nabla^2_{X,Y} Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z \\ R(X,Y)Z &:= \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} R\colon TM \otimes TM &\to \mathrm{End}(TM) \\ (X,Y) &\mapsto R(X,Y) \end{aligned}$$

linear.

mit:

- R schiefsymetrisch in X, Y gilt: $R(X,Y) = -R(Y,X)$
- $R(X,Y)$ ist schiefsymetrisch gilt: $g(R(X,Y)Z,W) = -g(Z,R(X,Y)W)$

Bemerkung

Wenn (V,g) ein euklidischer Vektorraum dann

$$\square(V,g) = \{T \in \mathrm{End}(V) \mid g(T_v,w) = -g(v,T_w)\}$$

das heißt $R \in \Omega^2(M, \square\underbrace{(TM)}_{\square(n)})$

Sei (V,g) wie oben, $R \in \bigwedge^2 V^* \otimes \square(V,g) \cong \bigwedge^2 V^* \otimes \bigwedge^2 V^* \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathbb{R} \ni S$, $S = S(R)(= \mathrm{tr}(R))$

$$\square(V,g) \quad = \quad \{T \in \mathrm{End}(V) \mid T \text{ schiefsymetrisch}\}$$

$$\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^* \overset{\xrightarrow{\flat\otimes\mathrm{id}}\cong\bigwedge^2 V^*}{\cong} V^* \otimes V^*$$

Definition

Sei R Riemanscher Krümmungstensor. Dann heißt $S(R)$, $(= X \in C^\infty)$ die Skalarkrümmung von M

missing 2019-07-02

TODO Bildchen 1

Satz: Brouwer

$$\begin{array}{rl} & f\colon D^2 \to D^2 \text{ stetig, [glatt]} \\ \Rightarrow & f \text{ hat einen Fixpunkt} \\ & (\exists x \in D^2, f(x) = x) \end{array}$$

Beweis: durch Widerspruch: Sei $f\colon D^2 \to D^2$ glatt mit $f(x) \neq x, \forall x \in D^2$

TODO Bildchen 2

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon D^2 & \to & \partial D^2 = S' \\ x & \mapsto & y := \text{ Gerade } f(x) \to x \cap \partial D^2 \\ \varphi \text{ ist glatt} & & \\ \varphi|_{\partial D^2} = \mathrm{id} & & \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & \\ \partial D^2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & D^2 \arrow[r] & \partial D^2 \arrow[d, equal] \\ S^1 & & S^1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \\
H^k(S^1) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H^1(D^2) \arrow[l, "i^*"'] & H^1(S^1) \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\mathbb{R} & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

TODO Bildchen 2 und weitere

$$T^2 = M = U \cup V, \quad \text{Mayer-Vretoris}$$

$$H^0(T^2) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(T^2) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^2(T^2) \longrightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \longrightarrow H^2(U \cap V) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \dots$$

ist exakt.

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{m}$$

$$\longrightarrow H^1(T^2) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{H^2(T^2)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rk} h &= 1 \\
\operatorname{rk} m &= 1 \\
\ker h &= \operatorname{im} m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim H^1(T^2) &= \operatorname{rk} h + \dim \ker h \\
&= \operatorname{rk} h + \operatorname{rk} m
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "m"] & H^1(T^2) \arrow[r, "h"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & {} \\
 & \mathbb{R}^2 &
\end{tikzcd}$$

$$\longrightarrow V_0 \longrightarrow V_i \longrightarrow V_{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n \longrightarrow \quad \text{exakt}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$$

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0 \quad \text{Kettenkomplex}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(V_i) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(V_*) =: \xi(V_*)$$

TODO Bildchen 3

$$\partial^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} V_2 & \xrightarrow{\partial} & V_1 & \longrightarrow & V_0 \\ \cong & & \cong & & \cong \\ \mathbb{R}^{|F|} & & \mathbb{R}^K & & \mathbb{R}^E \end{array}$$

$$\begin{aligned} E - K + F &= \dim H_0(V_*) - \dim H_1(V_*) + \dim H_2(V_*) \\ &= \dim H^0(S^2) - \dim H^1(S^2) + \dim H^2(S^2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

TODO Bildchen 4

Haben M-kompakt orientierte, $\dim M = n$.

$H^n(M \setminus \{p\}) = 0$

Beweis:

Sei $\omega \in \Omega^n(M \setminus \{p\})$, $\mathrm{d}\omega = 0$ (antisymetrisch)

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists \eta \in \Omega^{n-1}(M \setminus \{p\}) \text{ mit } \omega = \mathrm{d}\eta$$

TODO Bildchen 5

Zerlege:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1$$

s.d.

- $\omega_0 \in \Omega^n_c(M \setminus \{p\})$
- $\int \omega_0 = 0$
- $\omega_1 \in \Omega^n(\underbrace{S^{n-1} \times (0,1)}_{\mathrm{int}\, D^n \setminus \{p\}})$

$$\omega_1|_{S^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}, 1\right)} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \mathrm{d}\eta_0 \\ \omega_1 &= \mathrm{d}\eta_1 \end{aligned}$$

weil $H^n(S^{n-1}) \cong H^n(S^{n-1} \times (0,1)) = 0$

TODO missing from 2019-07-09

Euler-Lagrange-Gleichung

Variationsrechnung

TODO Bilchen

Variationsproblem $(1-D)$

$$S\colon C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$$

$$S(x) = \int_a^b \mathcal{L}(x, x', t')\,\mathrm{d}t \to \min, \quad \mathcal{L} \in C^\infty\mathbb{R}^3$$

S entspricht „Wirkung“.

Wenn x_0 das Funktional minnimiert, gilt: $(ha = hb = 0)$

$$S(x_0 + \varepsilon h) \geqslant S(x_0)S(x_0), \quad \forall h \in C^\infty[a,b]$$

$\Rightarrow$ d.h. die Funktion $\varepsilon \mapsto S(x_0 + \varepsilon h)$ hat ein Minimum an 0

$$\left.\frac{\partial S(x_0 + \varepsilon h)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
S(x_0 + \varepsilon h) &= \int_a^b \mathcal{L}(x_0 + \varepsilon h, x_0' + \varepsilon h', t)\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\,(x_0 + \varepsilon h, x_0' + \varepsilon h', t)\,h(t)\mathrm{d}t \\
&+ \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}\,(x_0 + \varepsilon h, x_0' + \varepsilon h', t)\,h'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= \frac{\partial S(x_0 + \varepsilon h)}{\partial \epsilon} \\
&= \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, x_0', t)h(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}(x_0, x_0', t)h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, x_0', t)\,\mathrm{d}t + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}(x_0, x_0', t)h(t)\right|_a^b \\
&- \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}(x_0, x_0', t)\right)h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b h(t)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, x_0', t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}(x_0, x_0', t)\right)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Lemma: (du-Bois-Raymond)

Wenn $f \in C^\infty[a,b]$, mit $\forall h \in C^\infty[a,b]$, $h(a) - h(b) = 0$ gilt:

$$\int_a^b h(t) \cdot f(t) = 0$$

Beweis:

Anfang: $f \equiv 04$

TODO Bildchen

$\exists c \in (a,b)$ mit $f(c) \neq 0$ (o.E. $f(c) > 0$)

$\Rightarrow \exists \delta > 0\colon f(t) > 0$ auf $(c-\delta, c+\delta)$

$\Rightarrow \exists h \in C^\infty[a,b]$, $h(a) = h(b) = 0$, $h(c) = 1$, $h(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} h &\subseteq [c-\delta, c+\delta] \\ \Rightarrow \int_a^b h(t) f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{c-\delta}^{c+\delta} h(t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &> 0 \end{aligned}$$

Lemma $\Rightarrow$ wenn x_0 das Funktional S minnimiert.

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, x_0', t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}(x_0, x_0', t) = 0$$

die Euler-Lagrange-Gleichung für $\mathcal{L}$, $S = \int_a^b \mathcal{L}(x, x', t)\,\mathrm{d}t$

Beispiel

$$\mathcal{L}(x, x', t) = (x')^2 - x \rightsquigarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = 2x'$$

Euler-Lagrange:

$$-1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} 2x' = 0 \Leftrightarrow x'' = -\frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = -\frac{t^2}{4} + \alpha(t) + \beta$$

Brachistochrone-Problem

TODO Bilchen

$$S(y, y', x) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{v_x}$$

(v Geschwindigkeit), $v_x^2 + v_y^2 = -y(x)$, Energieerhaltung ($m = g = 1$)

$$y'(x) = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\Rightarrow v_x^2(1 + (y')^2) = -y(x) \Rightarrow v_x = \sqrt{-\frac{y(x)}{1+(y')^2}} = \dots$$

$$(y, y') = \sqrt{-\frac{1+(y')^2}{y}} = \left(1 + {y'}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= (-y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y^1 \cdot \frac{1}{2}\left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= \frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}} \cdot y' \cdot y' \left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}} + (-y)^{-\frac{1}{2}} \cdot y'' \left(1+y'^{\frac{2}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&+ (-y)^{-\frac{1}{2}} y' \cdot 2y' \cdot y'' \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1+y'^2\right)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Behauptung: Wenn y eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist, für

$$S = \int_a^b \mathcal{L}(y, y')\mathrm{d}x \to \min$$

$$\Rightarrow \underbrace{y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - L}_{=:H} = \text{const}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\left(y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L\right)' &= \cancel{y'' \frac{\partial L}{\partial y'}} + y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} y' - \cancel{\frac{\partial L}{\partial y'} y''} \\
&= y' \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Gestern: Variationsproblem

$$\text{Wirkung} \to S(\underbrace{x}_{x \in C^\infty[a,b]}) = \int_a^b 2(x, \cdot x, t)\mathrm{d}t \to \min$$

Proposition

Wenn x_0 die Wirkung minnimiert/maximiert

$\Rightarrow$ x_0 erfüllt Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial 2(x_0, \cdot x_0, 1)}{\partial \cdot x} = \frac{\partial 2(x_0, \cdot x_0, t)}{\partial x}$$

Lemma

Wenn $2 = 2(x, \cdot x)$ [hängt nicht von t ab]

$\Rightarrow$ jede Lösung x_0 der Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt:

$$\cdot x_0 \frac{\partial 2}{\partial \cdot x} - L(x_0, \cdot x_0) = \text{const}$$

Beispiel: Brachistochrone

$$\mathcal{L}(y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \cancel{2}y' \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(1+(y')^2)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' \cdot \frac{\partial L}{\partial y'} = (y')^2(1+(y')^2)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$L = (1+(y')^2)(-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightsquigarrow y'^2\left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{-\frac{1}{2}} = C$$

$$C(-y)^{\frac{1}{2}}(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}} = \cancel{(y')^2} - (1+\cancel{(y')^2}) = -1$$

$$\Rightarrow y(1+(y')^2) = D$$

$$y\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right) = D$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{D}{y} - 1 = \frac{D-y}{y}$$

$$\left(\frac{y}{D-y}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\left(\frac{D}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{d}x \to \text{ Integrieren}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{D}{y}-1}} = x + D'$$

$$\begin{aligned} 1y &= z^2 \Rightarrow \mathrm{d}y = 2z\mathrm{d}z' \\ \rightsquigarrow &= \int \frac{2z\mathrm{d}z}{\sqrt{\frac{D}{Z^2}-1}} = \int \frac{2z^2\mathrm{d}z}{\sqrt{D-Z^2}} \end{aligned}$$

$$Z = \sqrt{D}\cdot\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{d}z = -\sqrt{D}\cdot\sin\varphi$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow &= \int \frac{2D\cos^2\varphi \cdot -\sqrt{D}\cdot\cancel{\sin\varphi}\cdot\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{D}\cancel{\sin\varphi}} \\ &= -D\int(1+\cos 2\varphi)\mathrm{d}\varphi = -D\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) \\ \Rightarrow y &= E\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right), \quad \text{Substitution durchgehen} \end{aligned}$$

Geodäten

Sei (M, g), A, $B \in M$.

TODO Bildchen

$$\gamma\colon [a, b] \to M, \quad \gamma(a) = A, \quad \gamma(b) = B$$

$$L(\gamma) = \int_a^b g(x(t))(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t \to \min$$

In Koordinaten ist

$$g(\gamma(t))(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)$$

$\to$ haben ein Variationsproblem mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\gamma^1, \dots, \gamma^n, \dot\gamma^1, \dots, \dot\gamma^n)$

Indem man $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ einzeln variiert bekommt man n Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial 2}{\partial \dot\gamma^i} = \frac{\partial 2}{\partial \gamma^i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Vorbereitung: Wie lösen anderes (!) Variationsproblem mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma, \dot\gamma) &= \frac{1}{2} g(\gamma(t))(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\gamma^k} = \sum_{j=1}^n g_{kj}\dot\gamma^j$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\gamma^k} = \sum_{j=1}^n g_{kj}\ddot\gamma^j + \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \frac{g_{kj}}{\partial x^i}\dot\gamma^i\dot\gamma^j$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\gamma(t))\dot\gamma^i\dot\gamma^j$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^n g_{kj}\ddot\gamma^j + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot\gamma^i\dot\gamma^j = 0$$

$$\text{irgendwas} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot\gamma^i\dot\gamma^j$$

Dies ist äquivalent zu

$$\ddot\gamma^m + \sum_{k=1}^{n} g^{mk}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\cdot\dot\gamma^i\dot\gamma^j$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \ddot\gamma^m &= \Gamma^m_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = 0\\ \Leftrightarrow \nabla_{\dot\gamma} &= 0\end{aligned}$$

Sei jetzt $\widehat{\mathcal{L}}(\gamma,\ddot\gamma) = g(\gamma(t))(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))^{\frac{1}{2}}$, aber $\dot\gamma$ nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. $g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) = 1$

TODO Bildchen

Letzter Abschnitt: Physik

$$\begin{aligned}A &\in \Omega^1(\mathbb{R}^4) = \Omega^1(M,\mathbb{R})\\ F &= \mathrm{d}A \in \Omega^2(M,\underbrace{\mathbb{R}}_{u(1)})\end{aligned}$$

$\mathrm{d}F = 0 \leftarrow$ die ersten 2 Maxwell-Gleichungen

$$S = \int_M F\wedge *F = \int_M \langle F,F\rangle \,\mathrm{vol}$$

$4 = 2\dot{2}$, $2 = 4-2$

$$2 = \langle F,F\rangle = \langle \mathrm{d}A,\mathrm{d}A\rangle$$

$$A \rightsquigarrow A + \epsilon H$$

$$\begin{aligned}S(A+\epsilon H) &= \int_M \langle \mathrm{d}A + \epsilon\mathrm{d}H, \mathrm{d}A + \epsilon\mathrm{d}H\rangle\,\mathrm{vol}\\ &= \int_M \langle \mathrm{d}A,\mathrm{d}A\rangle\,\mathrm{vol} + 2\cdot\epsilon\underbrace{\int_M\langle \mathrm{d}A,\mathrm{d}H\rangle} + \epsilon^2\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*)0 = \int_M \langle \mathrm{d}A,\mathrm{d}H\rangle\,\mathrm{vol} &= \int_M \mathrm{d}H\wedge *\mathrm{d}A \underbrace{=}_{M \text{ Kompakt geragen } / H \text{ Kompakt getragen}}\\ &= -\int H\wedge \mathrm{d}*\mathrm{d}A\\ &= \int H\wedge\mathrm{d}*F\end{aligned}$$

$(*)$ für jedes $H \Rightarrow \mathrm{d}*F = 0 \Leftrightarrow *\mathrm{d}*F = \mathrm{d}^*F$

F erfüllt also:

1. $\mathrm{d}F = 0 \leftarrow$ 1. Paar
2. $\mathrm{d}^*F = 0 \leftarrow$ 2. Paar

M Mannigfaltigkeit, $\rightsquigarrow$ studieren Riemansche Matriken g auf M

$$g \rightsquigarrow R \in \Omega^2(M, \underline{so}(u)) \to \underbrace{s}_{\text{Skalarkrümmung}}(R) \in C^\infty(M)$$

Einstein-Hilbert-Wirkung:

$$S(g) = \int_M s \cdot \mathrm{vol} \left(+ \Lambda \int \mathrm{vol} \right)$$

$\rightsquigarrow (M, g)$, s.d. g Extrempunkt für S ist, heißen Einstein-Mannigfaltigkeiten

Das Gleiche für nicht-Riemansche, sondern Pseudo-Riemansche Mannigfaltigkeiten $\to$ Allgemeine Relativitätstheorie