

DGEO Wintersemester 2019 alpha version, ohne
Gewähr

Dozent: Satz: Version:

Inhaltsverzeichnis

1	Meta-Infos	5
1.1	Skript	5
1.2	Forum	5
1.3	Literatur	6
2	Begriff Differentialgeometrie	6
3	Tangentialvektoren in \mathbb{R}^n	6
3.1	Notation	6
4	Definition: Derivation	7
5	Beispiel	8
6	Proposition	8
7	Definition: Tangentialraum	9
7.1	Bemerkung	9
8	Frage	9
9	Behauptung/Intuition	9
10	Definition: Pullback-Abbildung	13
11	Definition: Differential	13
12	Kettenregel	15
13	Interpretation von Tangentialvektoren als „Geschwindigkeitsvektor“	15
14	Satz über (inverse) implizite Funktionen	16
15	Satz: Satz über implizite Funktionen	17
16	Intermezzo: Topologische Räume	17
16.1	Definition: Topologischer Raum	17

16.2	Definition: Hausdorff-Raum	18
16.3	Definition: kompakter Hausdorff-Raum	18
16.4	Definition: Basis einer Topologie	18
16.5	Definition: 2. Abzählbarkeitsaxiom	18
17	Definition: Topologische Mannigfaltigkeit	18
17.1	Bemerkung	19
18	Definition: differenzierbarer Atlas	19
19	Definition: äquivalente Atlanten	19
20	Definition: glatte Mannigfaltigkeit	19
20.1	Beispiel	19
21	Vereinbarung	19
21.1	Beispiel	20
22	Glatte Abbildungen	20
22.1	Definition	20
22.2	Übung	21
22.3	Übung	21
22.4	Definition	21
22.5	Beispiel	21
23	Definition: Pullbackabbildung	21
23.1	Beobachtung	21
24	Tangentialraum	22
24.1	Definition	22
25	Tangentialraum zu einer Mannigfaltigkeit	22
25.1	Proposition	22
25.2	Korollar	24
26	Differential einer Abbildung	24
26.1	Definition	24
26.2	Definition: Differential	24
26.3	Definition: Kotangentialraum	24
27	Tangentialbündel	25
27.1	Proposition	25
27.2	Bemerkung	26
28	Vektorbündel	26
28.1	Definition	26
28.2	Beispiele:	27
28.3	Slogan	27
28.4	Definition: Schnitt	27
28.5	Bemerkung	27
28.6	Definition	28
28.6.1	Beispiel	28

28.7	Frage: Wo kommen die kleinen Mannigfaltigkeit her?	28
28.8	Beispiel: Definition durch Gleichung	28
28.9	Definition	28
28.10	Definition	28
28.10.1	Vorsicht	29
29	Untermannigfaltigkeiten	29
29.1	Definition einer Untermannigfaltigkeit	29
29.2	Definition: Mannigfaltigkeit	29
29.3	Satz: implizite Funktionen	30
29.4	Proposition	30
29.5	Satz vom regulären Wert	30
29.5.1	Definition: kritischer Wert	30
29.5.2	Satz: Satz vom regulären Wert	31
29.5.3	Beispiel: Sphäre	31
29.5.4	Bemerkung: Satz von Sard	31
30	Vektorfelder und ihre Flüsse	31
30.1	Beispiel	31
30.2	Definition: Vektorfeld	32
30.3	Beispiel	32
30.4	Flüsse von Vektorfeldern	32
30.4.1	Satz: Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von DGLs erster Ordnung in \mathbb{R}^n	33
30.4.2	Satz: Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes	33
30.4.3	Satz: Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes	34
30.4.4	Definition: maximaler Fluss	35
30.4.5	Übung:	35
30.4.6	Proposition:	35
30.4.7	Korollar	35
30.4.8	Definition: Einparametergruppe	35
30.4.9	Proposition	35
31	Vektorfelder und Flüsse	36
31.1	Definition	36
31.2	Beispiel	36
31.3	Bemerkung	36
31.4	Übung	36
31.5	Proposition	36
31.6	Korollar	37
31.7	Korollar	37
31.8	Lemma	37
32	10 Lie-Gruppen	37
32.1	Beispiel	37
32.2	Behauptung	38
32.3	Definition	38
32.4	Beispiel	38

32.5 Satz: Cartan	39
32.6 Frage	39
32.7 Erinnerung	39
32.8 Definition	40
32.9 Idee: „Erlangen-Programm“ 1872, Felix Klein	40
32.10Fakt	40
32.11Satz: Hauptsatz über Wirkungen	40
32.12Frage	41
32.13Erinnerung	41
32.14Lemma	41
32.15Behauptung	41
33 Linksinvariante Vektorfelder auf Lie-Gruppen	41
33.1 Lemma	41
33.2 Behauptung	42
33.3 Definition	42
33.4 Definition	42
33.5 Lemma	42
33.6 Lemma	42
33.7 Beispiel	43
34 Lie-Algebren	43
34.1 Erinnerung/Übung	43
34.2 Definition	44
34.3 Beispiele	44
34.4 Definition	45
34.5 Erinnerung	45
34.6 Proposition	45
34.7 Beispiel	46
34.8 Frage	50
34.9 Intermezzo: projektiver Raum	51
34.10Definition: Schleifen, Homotopien	51
34.11Definition: einfach zusammenhängend	52
34.12Beispiel	52
34.13Satz: Lie-Algebra \rightsquigarrow Lie-Gruppe	52
34.14Frage	52
34.15Beispiel	52
34.16Definition	53
34.17Beispiel	53
34.18Definition	53
34.19Definition	53
34.20Erinnerung	53
34.21Beispiel	54
34.22Beobachtung	54
34.23Proposition	54
34.24Beispiel	57
34.25Beispiel	57
34.26Definition	58
34.27Frage	58
34.28Beobachtung	58

34.29	Beobachtung	58
34.30	Definition	59
34.31	Satz	59
34.32	Proposition	60
34.33	Beispiel	61
34.34	Proposition	61
34.35	Korollar	62
34.36	Definition	63
34.37	Definition	63
34.38	Definition	63
34.39	Satz: Frobenius	63
35 (12)	Lineare Algebra: Tensorprodukte und äußere Potenzen	65
35.1	Motivation	65
35.2	Definition	66
35.3	Lemma	66
35.4	Bezeichnung	66
35.5	Proposition	67
35.6	Definition	67
35.7	Bemerkung	67
	35.7.1 Notation	67
	35.7.2 Beweis der Proposition	67
35.8	Vorbereitung	69
36	Äußere Algebra	71
36.1	Zusammenhang der Definition	76
36.2	Eigenschaften vom Pullback:	79
37	Symplektische Formen	79
37.1	Satz von Liouville	86
37.2	Beispiel: lustiger Kreisel	86

1 Meta-Infos

Übungen flexibel

1.1 Skript

myfsr.de

- Skripte
- ganz unten
- Typos und Fehler gerne und bitte an Benedikt Bartsch. E-Mail-Adresse siehe:
 - <https://myfsr.de/dokuwiki/doku.php?id=fsr:mitglieder>

1.2 Forum

physik.protagon.space

1.3 Literatur

Walschap: Metric Structures in Differential Geometry

Spivac: Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. I

Ben Andrews: Lectures on Differential Geometry

math-people.anu.edu.au/~andrews/DG

2 Begriff Differentialgeometrie

Sie studiert Mannigfaltigkeiten. Mannigfaltigkeiten ist die Abstraktion einer (Hyper-)Fläche in \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$.

TODO Bildchen 1

TODO Bildchen 2

Auf $U \cap V$ haben wir zwei Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc}
 & U \cap V & \\
 x \swarrow & & \searrow Y \\
 \underbrace{X(U \cap V)}_{\subseteq \mathbb{R}^2} & \xrightarrow{Y \circ X^{-1}} & \underbrace{Y(U \cap V)}_{\subseteq \mathbb{R}^2}
 \end{array}$$

Problem: bekannte Dinge aus der Analysis hängen meist von Koordinatensystemen ab.

Frage: Welche Größen sind koordinatenunabhängig?

3 Tangentialvektoren in \mathbb{R}^n

3.1 Notation

- $n, m \in \mathbb{N}$ seien ab jetzt natürliche Zahlen
- Alle Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – auch mit Einschränkungen der Bilder und Urbiler dieser – werden ab jetzt als glatt vorausgesetzt
- $f: U \rightarrow V$

$$D_x f = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right] \leftarrow \text{Matrix}$$

$$Df = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \in M_{m \times n}(C^\infty(U))$$

TODO Bildchen 3

naive Vorstellung: ein Tangentialvektor an $p \in \mathbb{R}^n$ ist ein (gewähltes) Element $\xi \in \mathbb{R}^n$

Alle möglichen Tangentialvektoren an allen Punkten sind dann identifiziert mit

$$T\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (p, \xi)$$

← Koordinatentransformation ändert Einträge

Basiswechselmatrix:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ \uparrow & \uparrow \\ f_1 & f_2 \end{array}$$

(in E -Koordinatensystem)

⇒

$$(B^{-1} \cdot p, B^{-1} \cdot \xi) = (p', \xi')$$

← Koordinaten von (p, ξ) in \mathcal{F} -Koordinatensystem.

TODO Bildchen 4

$$(p, \xi) \in T\mathbb{R}^n, \quad \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Richtungsableitung

$$\underbrace{\partial_\xi \varphi}_{\text{Richtungsableitung}} := \underbrace{D_p \varphi}_{\text{Zeile}} \cdot \underbrace{\xi}_{\text{Spalte}} = D_p \varphi(\xi) \in \mathbb{R}$$

Idee: benutze das als Definition

- „ein Tangentialvektor ist das, was Funktionen ableitet“
- „Tangentialvektor = Richtungsableitung“

Sei $(p, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ein (in Koordinaten darstellbarer) Tangentialvektor

TODO Bildchen 5

$$\begin{aligned} \partial_{(p, \xi)} \varphi &:= D_p \varphi(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (\varphi) \end{aligned}$$

4 Definition: Derivation

Sei $p \in \mathbb{R}^n$. Eine Derivation an p ist $\partial: C^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}$ mit

$$\partial(\varphi \cdot \psi) = \partial \varphi \cdot \psi(p) + \partial \psi \cdot \varphi(p)$$

5 Beispiel

$\forall (p, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \partial_{(p, \xi)} = \partial_{(p, \xi)}(\cdot)$ ist Derivation an p .

6 Proposition

$\forall \partial: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ Derivation in $p: \exists! \xi \in \mathbb{R}^n: \partial = \partial_{(p, \xi)}$

Beweis:

Seien $x^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$ Koordinatenabbildungen / Projektionen.
Setze:

$$\xi_i := \partial(x^i) \in \mathbb{R}$$

Zu zeigen:

$$\partial = \partial \left(p, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right)$$

Trick:

ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ kann mit $\varphi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sowie:

$$\varphi(x) = \varphi(p) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)(x^i - p^i) \quad \text{fast Taylor}$$

Beweis des Tricks:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(p) &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi(p + t(x-p))}{\partial t} dt \\ &\stackrel{\text{Kettenregel + Skalarprodukt ausmultiplizieren}}{=} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p + t(x-p)) \cdot (x^i - p^i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p + t(x-p)) dt}_{=: \varphi_i(x)} \end{aligned}$$

$$\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) \stackrel{\text{Leibnitz}}{=} \partial(1) + \partial(1) \Rightarrow \partial(1) = 0$$

$$\begin{aligned}
\partial(\varphi) &= \partial \left(\varphi(p) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot (x^i - p^i) \right) \\
&\stackrel{\text{Leibnitz, Linearität}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\partial(\varphi_i)(p^i - p^i)}_{=0} + \underbrace{\varphi_i(p)}_{\xi_i} \underbrace{\partial(x^i - p^i)}_{\text{konstant}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi_i(p) \xi_i \\
&= \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p)
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit folgt aus der Linearität der Derivation:

$$\begin{aligned}
&\partial_{(p,\xi)} = \partial_{(p,\xi')} \\
\Rightarrow &\partial_{(p,\xi-\xi')} = 0 \\
\Rightarrow &\forall i \in \mathbb{N}_{\leq n} : \xi^i - \xi'^i = 0 (= \partial_{(p,\xi-\xi')}(x^i))
\end{aligned}$$

□

Fazit: Tangentialvektoren an $p \in \mathbb{R}^n \cong$ Derivation an p

7 Definition: Tangentialraum

$$T_p \mathbb{R}^n := \{ \partial : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation} \}$$

7.1 Bemerkung

- Vektorraum, da Derivationen VR bilden
- Beweis der Proposition liefert:

$$T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n, \quad \partial_{(p,\xi)} \leftrightarrow \xi$$

- $\dim(T_p \mathbb{R}^n) = n$

8 Frage

Sei $p \in U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \leftarrow$ offenen Mengen. Was ist folgende Menge?

$$T_p U := \{ \partial : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation} \}$$

9 Behauptung/Intuition

Es gilt:

$$T_p U \cong T_p \mathbb{R}^n$$

Beweis:

Definiere die duale Abbildung:

$$\varepsilon^* : \begin{cases} T_p U & \rightarrow T_p \mathbb{R}^n \\ \partial & \mapsto \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^n) & \rightarrow C^\infty(U) \\ \varphi & \mapsto \partial(\varphi|_U) \end{cases} \end{cases}$$

Zeige, dass ε^* ein Isomorphismus ist.

Sei

$$\varepsilon : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^n) & \rightarrow C^\infty(U) \\ \varphi & \mapsto \varphi|_U \end{cases}$$

ε^* ist surjektiv:

Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\partial_{(p,\xi)} \in T_p \mathbb{R}^n$. $\varepsilon^*(\underbrace{\partial_{(p,\xi)}}_{\in T_p U}) = \partial_{(p,\xi)} \in T_p \mathbb{R}^n$. Surjektivität ist relativ

klar. Gibt es einen Unterschied zwischen $\partial_{(p,\xi)} \in T_p U$ und $\partial_{(p,\xi)} \in T_p \mathbb{R}^n$?

ε^* ist injektiv:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ker(\varepsilon^*) &= \{0\} \\ \Leftrightarrow \forall \partial \in \ker(\varepsilon^*) : \partial &= 0 \end{aligned}$$

Sei $\partial \in \ker(\varepsilon^*)$. Dann gilt für ∂ :

$$\begin{aligned} \partial &\in \ker(\varepsilon^*) \\ \Leftrightarrow \varepsilon^*(\partial) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\varphi \mapsto \partial(\varphi|_U)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\varphi \mapsto \partial(\varepsilon(\varphi))) &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial \circ \varepsilon &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial(\varphi|_U) &= 0 \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass:

$$\forall \psi \in C^\infty(U) \exists \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial(\psi) = \partial(\varphi|_U)$$

denn dann:

$$\partial(\psi) = \partial(\varphi|_U) = 0$$

Sei $\psi \in C^\infty(U)$. Sei

$$\chi(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

TODO Bildchen 6

die Hügelfunktion und

$$\varrho(x) := \frac{\int_{-\infty}^x \chi(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) dt}$$

die Hangfunktion

TODO Bildchen 7

U offen $\Rightarrow \exists r > 0 : B(p, 5 \cdot r) \subseteq U$. Sei:

$$\tilde{\varrho}: \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \varrho\left(3 - \frac{|x-p|}{r}\right), & x \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$\exists p \in V \subseteq U$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho} &= 1 \quad \text{auf } V \\ \tilde{\varrho} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus U \end{aligned}$$

TOOD Bildchen 8

Konstruiere φ :

$$\varphi(x) := \begin{cases} \psi(x) \cdot \tilde{\varrho}(x) & x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt gilt:

$$\begin{aligned} \partial(\varphi|_U) &= \partial((\tilde{\varrho} \cdot \psi)|_U) \\ &= \partial(\tilde{\varrho}|_U \cdot \psi) \\ &= \underbrace{\tilde{\varrho}|_U(p)}_{=1} \cdot \partial(\psi) + \underbrace{\partial(\tilde{\varrho}|_U)}_{(*)=0} \cdot \psi(p) \end{aligned}$$

Beweis von (*):

Konstruiere $\rho \in C^\infty(U)$ wie $\tilde{\varrho}$. Aber jetzt mit $\rho = 0$ auf $U \setminus V$ und $\rho(p) = 1$. Es gilt $\rho(1 - \tilde{\varrho}) = 0$.

TODO Bildchen 9

Daraus Folgt: ($\rho := \rho|_U$)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(\rho(1 - \tilde{\varrho})) \\ &= \partial(\rho - \rho\tilde{\varrho}) \\ &= \partial(\rho) - \partial(\rho\tilde{\varrho}) \\ &= \partial(\rho) - \underbrace{\rho(p)}_{=1} \partial(\tilde{\varrho}) - \underbrace{\tilde{\varrho}(p)}_{=1} \partial(\rho) \\ &= -\partial(\tilde{\varrho}) \end{aligned}$$

Wiederholung letztes mal:

Sei $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n = \{\partial: C^\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation an } p\}$. Das heißt:

1. ∂ linear
2. $\partial(f \cdot g) = f(p) \cdot \partial(g) + g(p) \cdot \partial(f)$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$

$$T_pU = \{\partial: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation an } p\}$$

$\varepsilon: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(U)$ Einschränkungabbildung

$\varepsilon^*: T_pU \rightarrow T_p\mathbb{R}^n: \partial \mapsto \partial \circ \varepsilon$ duale Abbildung. letztes mal: ε^* surjektiv. Für Injektivität: Es reicht zu zeigen:

$$\forall \partial \in T_pU, \psi \in C^\infty(U) \exists \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

mit $\partial(\psi) = \partial(\varphi|_U)$. Dazu $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varrho(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\varrho|_{(-\infty, -1]} = 0, \quad \varrho|_{[1, +\infty)} = 1$$

TODO Bildchen 10

NEU: (Alternativbeweis zum letzten Beweis):

Zudem sei $\sqrt{\varrho} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\sqrt{1-\varrho} \in C^\infty(\mathbb{R})$. (das kriegt man wenn man statt ϱ , ϱ^2 nimmt oder mit Taylor)

Dann: $\exists r > 0$ so dass $B(p, 5r) \subseteq U$, $B_{5r}(p)$

$$\tilde{\varrho}(x) = \begin{cases} \varrho\left(3 - \frac{|x-p|}{r}\right) & x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir wollen zeigen: $\partial(\tilde{\varrho}) = 0$, [$\varphi = \tilde{\varrho} \cdot \psi$ erfüllt dann das Gewünschte]

$$\begin{aligned} \partial(\tilde{\varrho}) &= \partial\left(\sqrt{\tilde{\varrho}^2}\right) \\ &= \partial\left(\sqrt{\tilde{\varrho}} \cdot \sqrt{\tilde{\varrho}}\right) \\ &= \underbrace{\sqrt{\tilde{\varrho}(p)}}_{=1} \cdot \partial\left(\sqrt{\tilde{\varrho}}\right) + \partial\left(\sqrt{\tilde{\varrho}}\right) \cdot \underbrace{\sqrt{\tilde{\varrho}(p)}}_{=1} \\ &= 2\partial\left(\sqrt{\tilde{\varrho}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 - \partial(\tilde{\varrho}) &= \partial(1) - \partial(\tilde{\varrho}) \\ &= \partial(1 - \tilde{\varrho}) \\ &= \partial\left(\sqrt{1 - \tilde{\varrho}^2}\right) \\ &= 2\sqrt{1 - \tilde{\varrho}(p)} \underbrace{\partial(\tilde{\varrho}(p))}_{=0} \partial\left(\sqrt{1 - \tilde{\varrho}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Fazit: $\varepsilon^*: T_p U \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$ ist ein Homomorphismus. „Tangentialraum ist lokal, sieht nicht was weit entfernt ist“

In der algebraischen Geometrie gibt es auch Tangentialräume aber da ist das kompliziert, weil es keine kompakt getragene Polynome gibt.

10 Definition: Pullback-Abbildung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f: U \rightarrow V$ (glatt)

Die Pullback-Abbildung zu f ist

$$f^*: C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U) : \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ f \uparrow & \nearrow & \\ U & & f^*(\varphi) = \varphi \circ f \end{array}$$

Beobachtung: f^* ist Algebrenhomomorphismus (= ist linear und respektiert Produkte)

11 Definition: Differential

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f: U \rightarrow V$ (glatt). Sei $p \in U$. Das Differential von f an p ist die Abbildung

$$D_p f: \begin{cases} T_p U & \rightarrow T_{f(p)} V \\ \partial & \mapsto \partial \circ f^* \end{cases}$$

das heißt:

$$[(D_p f)(\partial)](\varphi) = \partial(\varphi \circ f) = \partial(f^* \varphi)$$

Das Differential bildet Derivationen auf Derivationen ab. Zeige die Wohldefiniertheit:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(V) & \xrightarrow{f^*} & C^\infty(U) \\ & \searrow & \searrow \partial \\ & (D_p f)(\partial) & \mathbb{R} \end{array}$$

$(D_p f)(\partial)$ ist linear, da Komposition linearer Abbildung. Leibnitz Regel:

$$\begin{aligned} [(D_p f)(\partial)](\varphi \cdot \psi) &= \partial(f^*(\varphi \cdot \psi)) \\ &= \partial((\varphi \cdot \psi) \circ f) \\ &= \partial((\varphi \circ f) \cdot (\psi \circ f)) \\ &= \partial((f^* \varphi) \cdot (f^* \psi)) \\ &= (f^* \varphi)(p) \cdot \partial(f^* \psi) + (f^* \psi)(p) \cdot \partial(f^* \varphi) \\ &= \varphi(f(p)) \cdot [(D_p f)(\partial)](\psi) + \psi(f(p)) \cdot [(D_p f)(\partial)](\varphi) \end{aligned}$$

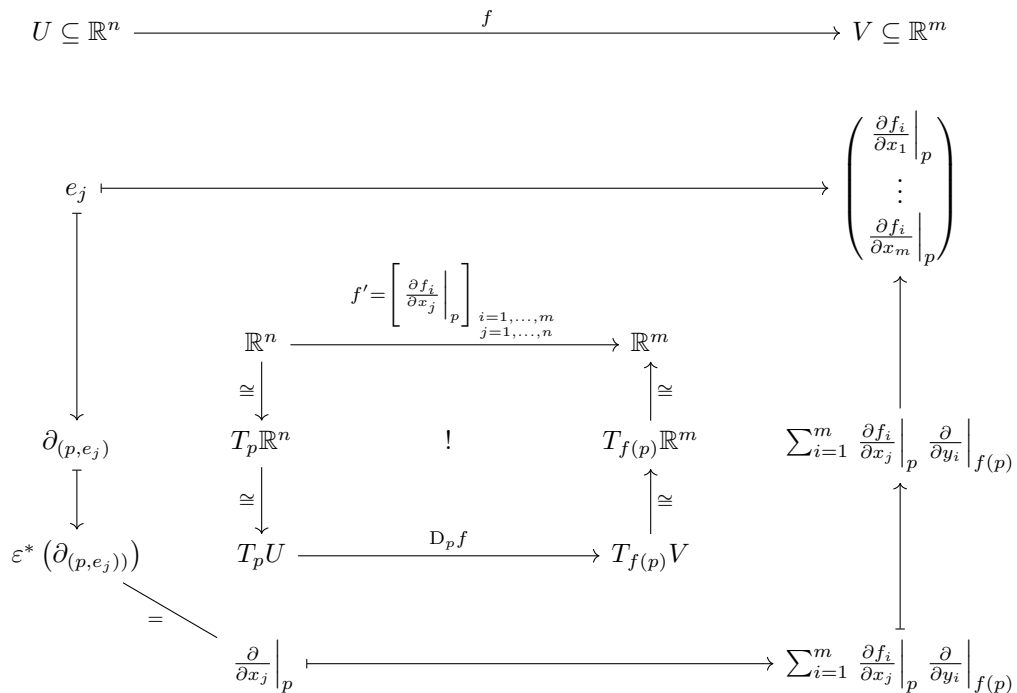
Vergleiche mit Definition aus Analysis:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f' = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}} & \mathbb{R}^m \\
\cong \downarrow & & \uparrow \cong \\
T_p \mathbb{R}^n & & T_{f(p)} \mathbb{R}^m \\
\cong \downarrow & & \uparrow \cong \\
T_p U & \xrightarrow{D_p f} & T_{f(p)} V
\end{array}$$

Es gilt für $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni \left((D_p f) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right] \right) [\varphi] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (f^* \varphi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (\varphi \circ f) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (\varphi \circ f)_1 \\
&\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \Big|_{f(p)} \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} \Big|_{f(p)} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \Big|_p \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \Big|_p \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p \\
&= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)} \right) [\varphi]
\end{aligned}$$

Das Diagramm wird mit den vorher konstruierten Isomorphismen kommutativ.



Das Differential aus der Analysis (Matrize) ist der Koordinatenausdruck von unserem Differential (Element eines Vektorraums).

$$\sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_p}_{\text{Koordinate } \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{f(p)}}_{\text{Element aus Basis}}$$

12 Kettenregel

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$D_p(g \circ f) = D_{f(p)}g \circ D_p f$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 ((D_{f(p)}g \circ D_p f) (\partial)) [\varphi] &= ((D_{f(p)}g) [(D_p f) (\partial)]) [\varphi] \\
 &= [(D_p f) (\partial)] (\varphi \circ g) \\
 &= \partial((\varphi \circ g) \circ f) \\
 &= \partial(\varphi \circ (g \circ f)) \\
 &= [(D_p(g \circ f)) (\partial)] (\varphi)
 \end{aligned}$$

13 Interpretation von Tangentialvektoren als „Geschwindigkeitsvektor“

Sei $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve, I ein Intervall, $p = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^n$

TODO Bildchen 11

Es wäre $D_{t_0}\gamma: T_{t_0}\mathbb{R}^1 \rightarrow T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^n$. Es soll gelten $\dot{\gamma}(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^n$. Definiere deshalb:

$$\dot{\gamma}(t_0) := (D_{t_0}\gamma) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

Übung: Es gilt:

$$\{\dot{\gamma}(t_0) \mid \gamma: I \subseteq \mathbb{R} \text{ glatte Kurve mit } \gamma(t_0) = p\} = T_p\mathbb{R}^n$$

14 Satz über (inverse) implizite Funktionen

Sei $f: U \rightarrow V$ glatt, $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$ so dass:

$$D_p f: T_p U \rightarrow T_p V$$

invertierbar ist. Dann ist f lokal ein Diffeomorphismus:

$\exists U' \subseteq U, V' \subseteq V$ offen, $p \in U'$, so dass

$$f|_{U'}: U' \xrightarrow{\cong} V'$$

ein Diffeomorphismus ist, das heißt glatte Abbildung mit glatter Inversen, d.h. $f: U' \rightarrow V'$ glatt, bijektiv, $f^{-1}: V' \rightarrow U'$ glatt.

Wir wollen jetzt Abbildungen $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ haben,

$$D_p f: \underbrace{T_p U}_{\cong \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{T_p V}_{\cong \mathbb{R}^m} \text{ linear}$$

\rightsquigarrow Was ist „bestmögliche“ Bedingung an $D_p f$, die schönes über f impliziert?

Die „richtige“ Bedingung an $D_p f$ ist, „vollen Rang“ zu haben, das heißt:

$$\text{rg}(D_p f) = \min\{m, n\}$$

\rightsquigarrow Es gibt zwei Varianten dieser Bedingung:

1. $n \leq m$, $\text{rg}(D_p f) = n \Leftrightarrow n \leq m$, $D_p f$ injektiv

Beispiel: $\iota: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, die Einbettung in die n ersten Koordinaten.

2. $n \geq m$, $\text{rg}(D_p f) = m \Leftrightarrow n \geq m$, $D_p f$ surjektiv

Beispiel: $\pi: \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, Projektion auf die m letzten Koordinaten.

15 Satz: Satz über implizite Funktionen

(ist quasi ein Analogon zu einer ähnlichen Aussage aus der linearen Algebra)

Sei $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, U, V offen, $0 \in U$, $f(0) = 0 \in V$.

1. Wenn $n \leq m$, $\text{rg } D_p f = n$, dann existiert eine offene Umgebung $V' \subseteq V$, $0 \in V'$ und ein Diffeomorphismus $g: V' \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V'' \subseteq \mathbb{R}^m$, $g(0) = 0$ mit $g \circ f|_{V'} = \iota$, d.h. nach einem Koordinatwechsel g wird f zur kanonischen Einbettung ι .
2. Wenn $n \geq m$, $\text{rg}(D_p f) = m$, dann existiert eine offene Umgebung $U' \subseteq U$, $0 \in U'$ und ein Diffeomorphismus $h: U'' \rightarrow U'$, $h(0) = 0$ mit $f \circ h = \pi$ (dort wo $g \circ f$ definiert ist)

Beweis:

Hauptidee: $\text{rg}(D_0 f)$ maximal $\Rightarrow \text{rg}(D_0 f)$ konstant in Umgebung der 0

1. ohne Einschränkung

$$D_p f = \begin{bmatrix} A \\ * \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad \det A \neq 0$$

(permutiere Koordinaten in \mathbb{R}^m)

Dann folgt: $D_x f = \begin{bmatrix} A(x) \\ * \end{bmatrix}$, $\det A(x) \neq 0$ in Umgebung von 0

Definiere:

$$\begin{cases} U \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m) \end{cases}$$

$$D_0 F = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline * & \mathbb{1} \end{array} \right]$$

Aus dem Satz über inverse Funktionen folgt F lokal invertierbar mit lokaler Inversen g

$$g \circ f = g \circ F \circ \iota - \iota$$

2. Beweis ist Übung

16 Intermezzo: Topologische Räume

16.1 Definition: Topologischer Raum

Ein topologischer Raum (X, τ) ist ein Paar aus einer Menge X und einem System τ von Teilmengen von X (\cong „offene Mengen“) mit

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $(U_i)_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$

Beispiel:

1. (X, d) metrischer Raum $\Rightarrow \tau_d := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists r > 0: B_r(x) \subseteq U\}$
die durch d induzierte Topologie
2. $(\mathbb{R}^n, d_2(x, y) = \|x - y\|_2) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$
3. $(\mathbb{R}^n, d_2(x, y) = \|x - y\|_1) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$

Es gilt $\tau_{d_2} = \tau_{d_1}$, da alle Normen äquivalent (vgl. Analysis4)

16.2 Definition: Hausdorff-Raum

Ein topologischer Raum X heißt hausdorffsch, wenn

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists U_x, U_y \text{ offen: } U_x \cap U_y = \emptyset$$

TODO Bildchen 12

16.3 Definition: kompakter Hausdorff-Raum

Ein Hausdorff-Raum (X, τ) heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h.

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq X, U_i \text{ offen} \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n \in I \text{ mit } \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \supseteq X$$

16.4 Definition: Basis einer Topologie

Sei (X, τ) topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B} \subseteq \tau$ von offenen Mengen heißt Basis der Topologie τ , falls jedes $U \in \tau$ als Vereinigung $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$ dargestellt werden kann.

16.5 Definition: 2. Abzählbarkeitsaxiom

Ein topologischer Raum ist zweitabzählbar bzw. erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

Beispiel:

Der euklidische Topologische Raum (\mathbb{R}^n, τ) hat $\underbrace{\{B(x, r) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}}_{=B_r(x)}$ als

Basis. (\mathbb{R}^n, τ) ist also zweitabzählbar.

17 Definition: Topologische Mannigfaltigkeit

Eine *topologische Mannigfaltigkeit* von Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein zweitabzählbarer Hausdorff-Raum M mit der Eigenschaft, dass jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ hat, die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist (das heißt $\exists x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, bijektiv, $x^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow U$ auch stetig)

17.1 Bemerkung

Da $\mathbb{R}^n \stackrel{\text{homöomorph}}{\cong} B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ könnte man $B_1(0)$ oder eine beliebige offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n statt \mathbb{R}^n verwenden. Dies führt auf eine äquivalente Definition.

18 Definition: differenzierbarer Atlas

Sei M topologische Mannigfaltigkeit von Dimension n . Ein *differenzierbarer Atlas* \mathcal{A} auf M ist eine Familie

$$\mathcal{A} = \{(U, x) \mid U \subseteq M \text{ offen, } x: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \text{ Homöomorphismus}\}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. die (U, x) 's überdecken M : $M = \bigcup_{(U, x) \in \mathcal{A}} U$
2. $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}, U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ ist glatt

Die Elemente eines Atlas' heißen *Karten*

19 Definition: äquivalente Atlanten

Zwei Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ heißen *äquivalent / kompatibel*, wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ein Atlas ist. Das heißt:

$$\forall (U, x) \in \mathcal{A}, (V, y') \in \mathcal{A}, U \cap V \neq \emptyset : y' \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y'(U \cap V) \text{ ist glatt}$$

20 Definition: glatte Mannigfaltigkeit

Eine *glatte* (= differenzierbar) *Mannigfaltigkeit* M ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Atlanten, die sogenannte „glatte Struktur“

20.1 Beispiel

\mathbb{R} ist 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die Atlanten

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{(\mathbb{R}, \text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})\} \\ \mathcal{A}' &:= \{(\mathbb{R}, \sqrt[3]{\cdot}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})\} \end{aligned}$$

sind nicht äquivalent.

21 Vereinbarung

Sei von nun an eine Mannigfaltigkeit immer glatt.

21.1 Beispiel

1. $\mathbb{R}^n: \mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$ ist n -dimensionale Mannigfaltigkeit
2. M Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen $\Rightarrow U$ ist Mannigfaltigkeit (Schneide alle Kartenumgebungen mit U)
3. Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, $\dim V = n \Rightarrow V$ ist n -dimensionale Mannigfaltigkeit (Die Wahl einer Basis definiert Karte $V \rightarrow \mathbb{R}^n$, je zwei solche Karten sind kompatibel, weil die Vergleichsabbildung durch Multiplizieren mit der Basiswechselmatrix gegeben ist)
4. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $V_i^\pm = \{x \in S^n \mid \pm x_i > 0\} \subseteq S^n$ offen $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n+1} (V_i^+ \cup V_i^-) = S^n$,

$$p_i: \begin{cases} V_i^\pm & \rightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{cases}$$

ist Homöomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ & \mapsto \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i \neq i} x_i^2}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1} \right) \end{aligned}$$

Was ist $\pi_i \circ \pi_j^{-1}$ (wo es definiert ist)?:

$$\begin{aligned} & (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) \\ & \mapsto \left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1} \pm \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} x_k^2}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) \end{aligned}$$

5. Es ist offen:

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$$

und eine Mannigfaltigkeit von Dimension n^2

6. $(M, \mathcal{A}_M), (N, \mathcal{A}_N)$ Mannigfaltigkeit $\Rightarrow (M \times N, \mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_N)$ Mannigfaltigkeit

22 Glatte Abbildungen

22.1 Definition

Seien M, N zwei Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *glatt*, wenn für jedes Paar von Karten (U, x) und (V, y) auf M bzw. N gilt: $y \circ f \circ x^{-1}$ ist glatt (wo definiert)

$$\begin{array}{ccc} U \supseteq M & \xrightarrow{f} & N \subseteq V \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{y \circ f \circ x^{-1}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

das heißt eine Abbildung ist glatt, wenn sie glatt in lokalen Koordinaten ist

22.2 Übung

$M \xrightarrow{f} N, N \xrightarrow{g} P, \text{glatt} \Rightarrow g \circ f \text{ glatt}$

Notation:

$$C^\infty(M, N) := \{f: M \rightarrow N \text{ glatt}\}, \quad C^\infty := C^\infty(M, \mathbb{R})$$

22.3 Übung

C^∞ ist eine \mathbb{R} -Algebra, das heißt Summen, Vielfache glatter Abbildungen sind glatt.

22.4 Definition

Eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn $\exists g: N \rightarrow M$ glatt:

$$g \circ f = \text{id}_M, \quad f \circ g = \text{id}_N$$

Wenn ein Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ existiert, so heißen M, N *diffeomorph*, in Zeichen

$$M \cong N, \quad M \xrightarrow[f]{\cong} N$$

22.5 Beispiel

1. $B_1(0) \cong \mathbb{R}^n, x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right) \cdot x$
2. $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \text{id})\}) \cong (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \sqrt[3]{\cdot})\})$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f=(x \mapsto x^3)} & \mathbb{R} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \sqrt[3]{\cdot} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} \end{array}$$

3. Zwei Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ auf M sind äquivalent, wenn

$$\text{id}: (M, \mathcal{A}_1) \rightarrow (M, \mathcal{A}_2)$$

ein Diffeomorphismus ist und Umgekehrt. (Übung)

23 Definition: Pullbackabbildung

$f: M \rightarrow N$ glatt $\Rightarrow f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M), \varphi \mapsto \varphi \circ f$ heißt *Pullback-* (Zurückzieh-) *Abbildung* (ist ein Algebrenhomomorphismus)

23.1 Beobachtung

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*, \quad \text{id}^* = \text{id}, \quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ Diffeomorphismus $\Rightarrow f^*$ ist Isomorphismus

24 Tangentialraum

24.1 Definition

Sei $p \in M$. Der *Tangentialraum* von M an p ist definiert als der Raum der Derivationen von $C^\infty(M)$ an p

$$T_p M := \{ \partial : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, } \partial(fg) = f_p \partial(g) + g_p \partial(f) \}$$

Sei (U, x) Karte von M , $p \in U \Rightarrow x(p) = \mathbb{R}^n$, $x : U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismus (Übung)

- $\Rightarrow x^* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} C^\infty(U)$ (siehe oben)
- $T_p U \cong T_{x(p)} \mathbb{R}^n (\cong \mathbb{R}^n)$, $\partial \mapsto \partial \circ x^*$

25 Tangentialraum zu einer Mannigfaltigkeit

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $C^\infty(M) = \{ f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ glatt} \}$, $p \in M$.

$$T_p M := \{ \partial : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation an } p, \text{ (d.h. } \partial \text{ linear und } \partial(fg) = f(p)\partial(g) + \partial(f)g(p) \}$$

Wir haben lokale Karte an p :

$$\exists U \ni p \text{ offen, } x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Diffeomorphismus}$$

letztes Mal: $\Rightarrow x^* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} C^\infty(U)$ Isomorphismus.

$$\Rightarrow (x^*)^* : T_p U \xrightarrow{\cong} T_{x(p)} \mathbb{R}^n : \partial \mapsto \partial \circ x^*$$

Fazit:

$$T_p U \cong T_{x(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

mit Basis:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$$

(„Notationsmissbrauch“)

„schiebt p nach \mathbb{R}^n und leitet es dort ab, formal $((x^*)^*)^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x (p)$ “

25.1 Proposition

Die Inklusionsabbildung $i : U \hookrightarrow M$ induziert einen Isomorphismus $(i^*)^* : T_p U \rightarrow T_p M$

$$i^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(U)$$

ist die Pullbackabbildung, aber eigentlich nur die Restriktionsabbildung

$$(i^*)^*(\partial) = \partial \circ i^*$$

Beweis:

Haben wir schon für $M = \mathbb{R}^n$ gemacht, der Beweis bleibt der gleiche (18.10 und 24.10)

$(i^*)^*$ injektiv:

$$\partial \circ i^* = 0 \Leftrightarrow \partial(f) = 0$$

für alle Funktionen $f \in C^\infty(U)$, die Einschränkungen von Funktionen auf M sind.

Da $\partial = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$, reicht es zu zeigen, dass $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Seien $\tilde{x}_i \in C^\infty(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\tilde{x}_i = x_i$ in einer Umgebung von p
2. $\text{supp } \tilde{x}_i$ ist kompakt

(das geht, da U diffeomorph zu \mathbb{R}^n und dort weiß man, dass (und wie) das geht \curvearrowright benutze Abschneidefunktionen)

Es gilt: $\partial(\tilde{x}_i) = \alpha_i$ und \tilde{x}_i sind offensichtlich auf M glatt (durch 0) fortsetzbar.

$(i^*)^*$ surjektiv: Sei $\tilde{\partial} \in T_p M$. Wir suchen $\partial \in T_p M$ mit $\hat{\partial} = \partial \circ i^*$. Wir suchen also die $\alpha_i \in \mathbb{R}$, sodass

$$\hat{\partial} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Sei $\alpha_i := \hat{\partial}(\tilde{x}_i)$, $i = 1, \dots, n$. Wir wollen zeigen, dass

$$\hat{\partial}(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p, \quad f \in C^\infty(M)$$

Trick: Benutze wieder die Abschneidefunktion $\tilde{\varrho}: U \rightarrow [0, 1]$ mit $\tilde{\varrho} = 1$ in einer Umgebung von p , $\text{supp } \tilde{\varrho}$ kompakt und sodass $\hat{\partial}(\tilde{\varrho}) = 0$ [siehe Beweis für $M = \mathbb{R}^n$]

$$\Rightarrow \hat{\partial}(f) = \hat{\partial}(\tilde{\varrho}f)$$

[wegen Leibnitzregel]

$$\text{supp } \tilde{\varrho}f \subseteq U$$

und

$$C^\infty(U) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

insbesondere ist $\tilde{\alpha}f$ darstellbar als $f(p) + \sum_{i=1}^n x_i f_i(x)$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p$$

(wie in vorigen Beweis)

25.2 Korollar

- $\dim M = n \Rightarrow T_p M \cong \mathbb{R}^n$, $p \in M$
- (U, x) Karte um $p \in U \Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ ist Basis von $T_p M$

26 Differential einer Abbildung

26.1 Definition

Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $f: M \rightarrow N$ glatt. Sei $p \in M$. Das *Differential* von f an p ist die lineare Abbildung.

$$D_p f = (f_*)_p : \begin{cases} T_p M & \rightarrow T_{f(p)} N \\ v & \mapsto v \circ f^* \\ (C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}) & \rightarrow (C^\infty(N) \xrightarrow{f^*} C^\infty(M) \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}) \end{cases}$$

Wohldefiniertheit:

$$\nu \circ f^* \in T_{f(p)} N$$

denn:

$$\begin{aligned} (\nu \circ f^*)(\varphi \cdot \psi) &= \nu(f^*(\varphi \cdot \psi)) \\ &= \nu(f^*(\varphi) \cdot f^*(\psi)) \\ &= (f^*(\varphi))(p) \cdot \nu(f^*(\psi)) + (f^*(\psi))(p) \cdot \nu(f^*(\varphi)) \\ &= \varphi(f(p)) \cdot (\nu \circ f^*)(\psi) + \psi(f(p)) \cdot (\nu \circ f^*)(\varphi) \end{aligned}$$

26.2 Definition: Differential

Sei $\varphi \in C^\infty(M)$, $p \in M$. Das *Differential* von φ an p ist eine lineare Abbildung

$$d\varphi(p) \in (T_p M)^* =: T_p^* M$$

26.3 Definition: Kotangententialraum

$$T_p^* M := (T_p M)^*$$

heißt *Kotangententialraum*. Wenn (U, x) eine Karte um p ist, folgt auch

$$T_p^* U \cong T_p^* M$$

Links: Beweis: $dx_1, \dots, dx_n \rightarrow$ ist die duale Basis zu $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$, denn

$$dx_i(p) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right|_p = \delta_{ij}$$

$$d\varphi(p) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_p$$

weil die Koordinaten des Vektors $d\varphi(p)$ in der Basis dx_1, \dots, dx_n genau durch Anwenden der dualen Basisvektoren $\left(\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right)$ entstehen.

27 Tangentialbündel

$$TM := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$$

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad v \in T_p M \Leftrightarrow \pi(v) = p$$

27.1 Proposition

TM trägt eine glatte Struktur, die durch die glatte Struktur von M induziert ist; mit dieser ist TM eine Mannigfaltigkeit von Dimension $2n$.

Beweis:

Sei U, x eine Karte von M . Definiere $\tilde{U} := \pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{p \in U} T_p M$

$$\begin{cases} \tilde{U} & \rightarrow \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto \left(\underbrace{x(\pi(v))}_{\in \mathbb{R}^n}, [dx_1(\pi(v))](v), \dots, [dx_n(\pi(v))](v) \right) \end{cases}$$

Definiere eine Topologie auf TM durch Forderung, dass alle \tilde{x} 's Homöomorphismen sind. Wir müssen nur überprüfen, dass

$$\{(\tilde{U}, \tilde{x}) \mid (U, x) \in \mathcal{A}\}$$

einen Atlas bilden.

Seien $(\tilde{U}, \tilde{x}), (\tilde{V}, \tilde{y})$ zwei solche Karten so dass

$$\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$$

Wenn $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, so gilt

$$(\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1})(a, b) = \underbrace{((y \circ x^{-1})(a))}_{\text{glatt}}, \underbrace{(D_a(y \circ x^{-1})(b))}_{\text{glatt}} \rightarrow \text{glatt}$$

27.2 Bemerkung

Analog ist $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Gestern: Tangentialbündel

$$\begin{array}{ccc}
 T^*M = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p^*M & \rightarrow & \text{Ist auch eine glatte Mannigfaltigkeit} \\
 \downarrow \pi & & \\
 M & \pi(v) = p, \quad v \in T_p^*M & \dim T^*M = 2\text{-dimensionale Mannigfaltigkeit}
 \end{array}$$

← geht auch ohne *.

Diese Erkenntnis bringt folgendes Resultat:

Sei $f: M \rightarrow N$ glatt. Das Differential von f wird jetzt zu einer Abbildung:

$$Df = f_*: \begin{cases} TM & \rightarrow TN \\ v \mapsto D_{\pi(v)}f(v) \end{cases}$$

f_* ist glatt, denn wenn (U, x) bzw. (V, y) Karten auf M bzw. N sind. $\rightsquigarrow (\tilde{U}, \tilde{x}), (\tilde{V}, \tilde{y})$ -Karten für TM, TN

$$(\tilde{y} \circ f_* \circ \tilde{x}^{-1}): \begin{cases} \mathbb{R}^{2n} & \rightarrow \mathbb{R}^{2m} \text{ genauer: auf offenen Teilmengen} \\ (a, b) & \mapsto ((y \circ f \circ x^{-1})(a), D_a(y \circ f \circ x^{-1})(b)) \rightarrow \text{glatt} \end{cases}$$

Aus der Definition von $Df = f_*$ folgt:

$$\pi_{TN} \circ f_* = f \circ \pi_{TM}$$

das heißt das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{Df=f_*} & TN \\
 \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TN} \\
 M & \xrightarrow{f_*} & N
 \end{array}$$

28 Vektorbündel

28.1 Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein *Vektorbündel* E von Dimension m über M ist eine Mannigfaltigkeit E zusammen mit einer surjektiven glatten Abbildung $\pi: E \rightarrow M$ (Projektionsabbildung), so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. jede Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$, $p \in M$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum von Dimension m
TODO Bildchen 13.1
2. [lokale Trivialität] für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung U , so dass

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow[\psi]{\cong} U \times \mathbb{R}^m$$

so dass für jedes $g \in U$ gilt:

$$\psi(q, \cdot): E_q \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ist ein Vektorraumisomorphismus

28.2 Beispiele:

1. Das triviale m -dimensionale Vektorbündel über M ist $E = M \times \mathbb{R}^m$, π projiziert in die erste Komponente
2. TM, T^*M Vektorbündel über M von Dimension $\dim M$
3. Wenn E und F Vektorbündel über M sind, so ist,

$$E \oplus F \stackrel{\text{als Menge}}{=} E_p \oplus F_p$$

auch ein Vektorbündel (Übung: überprüfe, dass es eine Struktur der Mannigfaltigkeit trägt und lokal trivial ist)

28.3 Slogan

„Differentialgeometrie ist ein Teil der Mathematik, wo man Analysis horizontal und lineare Algebra vertikal macht“

TODO Bildchen 13.2

28.4 Definition: Schnitt

Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Ein *Schnitt* von E ist eine glatte Abbildung $s: M \rightarrow E$ mit

$$\pi \circ s = \text{id}_M$$

$$\Gamma(E) := \{s: M \rightarrow E \mid S \text{ Schnitt von } E\}$$

Wenn $s \in \Gamma(E)$ ist ein Vektorraum mit punktweisen Operationen:

$$(s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p), \quad (\lambda s)(p) = \lambda \cdot s(p), \quad p \in M, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

28.5 Bemerkung

Wenn $E = M \times \mathbb{R}^m$, dann ist $\Gamma(E) = C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$. Wenn nun $s \in \Gamma(E)$, $\varphi \in C^\infty$.

$$\Rightarrow (\varphi \cdot s)(p) := \varphi(p) \cdot s(p)$$

Das macht $\Gamma(E)$ zu einem $C^\infty(M)$ -Modul.

Definition:

Seien $\begin{array}{c} E \\ \pi_E \downarrow \\ M \end{array}$ und $\begin{array}{c} F \\ \pi_F \downarrow \\ M \end{array}$ zwei Vektorbündel. Ein *Homomorphismus* $f: E \rightarrow F$ ist

eine glatte Abbildung mit $\pi_F \circ f = \pi_E$:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & F \\
 \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_F \\
 M & \xrightarrow{\text{id}} & M
 \end{array}$$

(das Diagramm kommutiert)

und so dass $f|_{E_p}: E_p \rightarrow F_p$ linear ist.

28.6 Definition

$\begin{array}{ccc} E & & F \\ \downarrow & , & \downarrow \\ M & & M \end{array}$ heißen *isomorph*, wenn es Vektorbündelhomomorphismen $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow E$ gibt mit

$$g \circ f = \text{id}_E, \quad f \circ g = \text{id}_F$$

Wichtige Erkenntnis: Nicht jedes Vektorbündel ist trivial! (isomorph zu $M \times \mathbb{R}^m$) (Ankündigung; Beweis später!)

28.6.1 Beispiel

TS^2 Man kann den Igel nicht kämmen

28.7 Frage: Wo kommen die kleinen Mannigfaltigkeit her?

Wo kriegt man Mannigfaltigkeiten her?

28.8 Beispiel: Definition durch Gleichung

Sei M eine Mannigfaltigkeit. $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt, $g \in \mathbb{R}^m$

$$f^{-1}(g) = \{p \in M \mid f(p) = g\} \subseteq M$$

Wann sind die Mengen eine Mannigfaltigkeit? Wir sind dann vor Fragen gestellt:

1. Was ist eine sinnvolle Definition einer Untermannigfaltigkeit
2. Wann ist $f^{-1}(g)$ eine Untermannigfaltigkeit?

28.9 Definition

Seien M, N Mannigfaltigkeit, Eine Abbildung $i: M \rightarrow N$ heißt Immersion, wenn $D_p i$ injektiv ist für jedes $p \in M$.

28.10 Definition

Eine (injektive) Immersion $i: M \rightarrow N$ heißt Einbettung, wenn $i: M \rightarrow i(M) \subseteq N$ ein Homöomorphismus.

28.10.1 Vorsicht

Untermannigfaltigkeiten kann „injektive Immersion“ oder „Einbettung“ heißen – nicht äquivalent!!

Für uns heißt „ M ist eine Untermannigfaltigkeit von N “ so viel wie „wir fixieren eine Einbettung $i: M \rightarrow N$ “

TODO Bildchen 14 TODO Bildchen 15

29 Untermannigfaltigkeiten

TODO Bildchen 16 TODO Bildchen 17

29.1 Definition einer Untermannigfaltigkeit

Es gibt zwei gängige Definitionen einer Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$, die sich dadurch unterscheiden, welche Eigenschaften man von der Inklusionsabbildung $i: N \rightarrow M$ verlangt.

29.2 Definition: Mannigfaltigkeit

Seien N, M Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $i: N \rightarrow M$ heißt Immersion, wenn $D_p f: T_p M \rightarrow T_p N$ injektiv für jedes $p \in M$ ist. Eine Immersion $i: N \rightarrow M$ heißt Einbettung, wenn $i: N \rightarrow i(N) \subseteq M$ ein Homöomorphismus ist (d.h. i ist injektiv und $i^{-1}: i(N) \rightarrow N$ ist stetig).

Dementsprechend gibt es zwei Definitionen einer Untermannigfaltigkeit, die in der Literatur zu finden sind:

- eine (immersierte) Untermannigfaltigkeit $i: N \rightarrow M$ ist eine Mannigfaltigkeit N zusammen mit einer injektiven Immersion $i: N \rightarrow M$;
- eine (eingebettete) Untermannigfaltigkeit $i: N \rightarrow M$ ist eine Mannigfaltigkeit N zusammen mit einer Einbettung $i: N \rightarrow M$.

Wir werden in diesem Kurs das Wort „Untermannigfaltigkeit“ stets für eingebettete Untermannigfaltigkeit benutzen.

Wir erinnern uns an den Satz über implizite Funktion, die wir früher in der Vorlesung bewiesen hatten.

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt. Offensichtlich ist der Rang von f an jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ kleiner oder gleich $\min(n, k)$. Man sagt, f habe *maximalen Rang* an einem Punkt, wenn der Rang von f an p gleich $\min(n, k)$ ist.

Natürlicherweise tauchen hier zwei Varianten auf:

- $n \leq k$; dann ist der mögliche maximale Rang gleich n . Ein Beispiel für eine Abbildung mit maximalem Rang n (an jedem Punkt) ist die Einbettung $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \iota(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$.
- $k \leq n$; dann ist der mögliche maximale Rang gleich k . Ein Beispiel für eine Abbildung mit maximalem Rang k (an jedem Punkt) ist die Projektion $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \pi(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_k)$.

29.3 Satz: implizite Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

1. Wenn $n \leq k$ und f maximalen Rang ($= n$) an 0 hat, dann gibt es eine Karte g von \mathbb{R}^k an 0 mit $g \circ f = \iota$ auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$; TODO Bildchen 18
2. Wenn $k \leq n$ und f maximalen Rang ($= k$) an 0 hat, dann gibt es eine Karte h von \mathbb{R}^n an 0 mit $f \circ h = \pi$ auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$; TODO Bildchen 19

Man sollte anmerken, dass wegen des Satzes über implizite Funktion jede Immersion lokal eine Einbettung ist:

29.4 Proposition

Sei $i: N \rightarrow M$ eine Immersion, $\dim N = n$, $\dim M = m$. Dann gilt: für jedes $p \in N$ gibt es eine Umgebung V von p in N und eine Karte (U, y) mit $i(p) \in U \subseteq M$, so dass:

1. $q \in i(V) \cap U$ genau dann, wenn $y^{n+1}(q) = \dots = y^m(q) = 0$ (anders gesagt, $y(i(V) \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap y(V)$);
2. $i|_V$ ist eine Einbettung.

TODO Bildchen 20

Beweis:

Sei x eine Kartenabbildung um p mit $x(p) = 0$, \tilde{y} eine Kartenabbildung um $i(p)$ mit $\tilde{y} \circ i(p) = 0$. Dann hat $\tilde{y} \circ i \circ x^{-1}$ maximalen Rang ($= n$) an 0 , also gibt es nach dem Satz über implizite Funktion eine Karte g von \mathbb{R}^m und eine Umgebung W von 0 mit $g \circ \tilde{y} \circ i \circ x^{-1}|_W = \iota|_W$, wobei $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die kanonische Einbettung ist. Sei $U := x^{-1}(W)$, $y = g \circ \tilde{y}$; dann gilt (1) nach Konstruktion. (2) folgt dann, weil $i|_U = y^{-1} \circ \iota \circ x|_U$ eine Verkettung von Einbettungen ist.

29.5 Satz vom regulären Wert

Der Satz vom regulären Wert ist von zentraler Bedeutung in Differentialgeometrie, weil er uns erlaubt, Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

29.5.1 Definition: kritischer Wert

Seien M, N Mannigfaltigkeiten von Dimension n bzw. k , $f: M \rightarrow N$ glatt. Ein Punkt $p \in M$ heißt regulärer Punkt von f , wenn $\text{Rang } D_p f = k$; andernfalls heißt p ein kritischer Punkt von f . Ein Punkt $q \in N$ heißt regulärer Wert von f , wenn $f^{-1}(q)$ keine kritischen Punkte enthält (z.B. weil $q \notin f(M)$). Andernfalls heißt q kritischer Wert von f .

Wenn $n \geq k$ ist (und das ist für uns der interessante Fall), heißt also die Bedingung, dass $q \in N$ ein regulärer Wert von f ist so viel wie: an jedem Urbildpunkt von q hat f maximalen Rang ($= k$).

29.5.2 Satz: Satz vom regulären Wert

Seien M, N Mannigfaltigkeiten von Dimension n bzw. k mit $n \geq k$, $f: M \rightarrow N$ glatt. Wenn $q \in f(M)$ ein regulärer Wert ist, dann ist $A := f^{-1}(q) \subseteq N$ (= die Faser von f an q) eine Untermannigfaltigkeit von M .

Beweis:

Sei $y: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Karte um $q \in N$ mit $y(q) = 0$. Sei außerdem $p \in A$ und $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte um $p \in M$. Zerlege $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ und seien π_1, π_2 die entsprechenden Projektionsabbildungen. Außerdem sei $\iota_2: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Einbettung in die letzten Koordinaten: $\iota_2(a_1, \dots, a_{n-k}) = (0, \dots, 0, a_1, \dots, a_{n-k})$.

Da $y \circ f \circ x^{-1}$ maximalen Rang an $0 \in \mathbb{R}^n$ hat, gibt es nach Satz über implizite Funktionen (ii) eine Karte (W, h) um $0 \in \mathbb{R}^n$ mit $y \circ f \circ x^{-1} \circ h = \pi_1|_W$. Sei $\widetilde{W} := \pi_2(W)$. Dies ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^{n-k} , und $y \circ f \circ x^{-1} \circ h \circ \iota_2 = \pi_1 \circ \iota_2 = 0$ auf \widetilde{W} .

TODO Bildchen 21

Das heißt, wenn $z := x^{-1} \circ h \circ \iota_2|_{\widetilde{W}}$, so folgt $z(\widetilde{W}) \subseteq A$. Nun behaupten wir, dass $z(\widetilde{W}) = A \cap (x^{-1} \circ h)(W)$, so dass z ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Es ist zunächst klar, dass $z(\widetilde{W}) \subseteq A \cap (x^{-1} \circ h)(W)$, weil $z(\widetilde{W}) = (x^{-1} \circ h \circ \iota_2)(\widetilde{W}) = (x^{-1} \circ h)(W \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-k}))$. Für die andere Inklusion nehmen wir ein $\tilde{p} \in A \cap (x^{-1} \circ h)(W)$; dann folgt aber $\tilde{p} = (x^{-1} \circ h)(u)$ für ein eindeutig bestimmtes $u \in W$, und $0 = (y \circ f)(\tilde{p}) = (y \circ f \circ x^{-1} \circ h)(u) = \pi_1(u)$, so dass $u = (0, a) \in 0 \times \widetilde{W}$. Dann gilt aber $\tilde{p} = z(a) \in z(\widetilde{W})$. Es folgt, dass $i: A \hookrightarrow M$ eine topologische Einbettung ist (also ein Homöomorphismus auf sein Bild).

Wir versehen nun A mit der glatten Struktur induziert durch die oben konstruierten Karten $(z(\widetilde{W}), z^{-1})$, wenn p die Menge A durchläuft (Übungsfrage: warum sind diese Karten kompatibel?). Dann ist die Inklusion $i: A \hookrightarrow M$ sogar glatt, weil $x \circ i \circ (z^{-1})^{-1} = h \circ \iota_2$.

29.5.3 Beispiel: Sphäre

Die Abbildung $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto \|a\|^2$, erfüllt $Df(a) = 2(a_1, \dots, a_{n+1})$; der Rang des Differentials ist also maximal (= 1) an jedem Punkt außer 0. Das heißt, die Sphäre vom Radius $r > 0$, $S_r := f^{-1}(r)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} .

29.5.4 Bemerkung: Satz von Sard

Der (höchst nichttriviale) Satz von Sard besagt, dass eine glatte Abbildung $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \geq n$) stets „sehr viele“ reguläre Werte hat (insbesondere ist die Menge der regulären Werte stets dicht in \mathbb{R}^n). Das heißt, dass eine „generische“ Faser von f eine Untermannigfaltigkeit ist.

30 Vektorfelder und ihre Flüsse

30.1 Beispiel

TODO Bildchen 22

30.2 Definition: Vektorfeld

Sei M eine Mannigfaltigkeit, TM sein Tangentialbündel und $\pi: TM \rightarrow M$ die Projektionsabbildung. Ein Vektorfeld X auf M ist ein Schnitt des Tangentialbündels, d.h. eine glatte Abbildung $X: M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$ (d.h. $X(p) \in T_p M$ für jedes $p \in M$).

Der Wert von X an einem Punkt $p \in M$ wird durch $X(p)$ oder X_p bezeichnet.

Wir notieren folgende Eigenschaften der Vektorfelder:

1. Die Vektorfelder bilden ein Vektorraum bezüglich punktweiser Operationen, weil der Wert eines Vektorfeldes an jedem Punkt p in dem Vektorraum $T_p M$ liegt. Der Vektorraum der Vektorfelder auf M wird durch $\Gamma(TM)$, $\text{Vect}(M)$ oder $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.
2. Man kann Vektorfelder mit glatten Funktionen multiplizieren: wenn $X: M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld ist und $f \in C^\infty(M)$, dann ist $fX: p \mapsto f(p)X(p)$ auch ein Vektorfeld.
3. Da Tangentialvektoren auf Funktionen durch Ableitungen wirken, kann man ein Vektorfeld X auf eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ anwenden und eine neue Funktion $X(f) \in C^\infty(M)$ bekommen mit

$$(X(f))(p) = X_p(f)$$

4. wenn (U, x) eine Karte um $p \in M$ ist, definiert sie die Koordinatenvektorfelder $\partial/\partial x^i$ auf U . Daher kann jedes Vektorfeld auf U dargestellt werden als

$$X = \sum_{i=1}^n X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n dx^i(X) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Umgekehrt definiert in diesem Fall eine beliebige "Linearkombination"

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

mit $f_i \in C^\infty(V)$, $i = 1, \dots, n$, ein Vektorfeld X auf V .

30.3 Beispiel

Wenn $M = \mathbb{R}^n$, dann gilt $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (Übung!). In diesem Falle kann man Vektorfelder $X: \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$ mit glatten Funktionen $\underline{X}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ identifizieren: ein Vektorfeld X entspricht eindeutig der Funktion $u \mapsto (X(u^1), \dots, X(u^n))$, also seinen Koordinaten bzgl. $\frac{\partial}{\partial u^i}$.

30.4 Flüsse von Vektorfeldern

Eines der wichtigen Ergebnisse in der Analysis ist der Satz über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (der Satz von Picard-Lindelöf). Dieser gilt auch auf Mannigfaltigkeiten und bildet somit interessanten Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und Diffeomorphismen. Wir fangen mit folgender Version des klassischen Satzes von Picard-Lindelöf in \mathbb{R}^n .

30.4.1 Satz: Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von DGLs erster Ordnung in \mathbb{R}^n

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt. Dann existiert für jedes $a \in U$ eine Umgebung W von a , ein offenes Intervall $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\psi: I \times W \rightarrow U$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\psi(0, u) = u$,
2. $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, u) = F(\psi(t, u))$.

Die Eindeutigkeit bedeutet hier: wenn $W_1, W_2 \subseteq W$ beliebige Teilmengen sind und die Abbildungen $\psi_1: I_1 \times W_1 \rightarrow U$, $\psi_2: I_2 \times W_2 \rightarrow U$ wie oben die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen, dann stimmen sie auf $I_1 \times W_1 \cap I_2 \times W_2$ überein.

Die Abbildung $\psi(t, u)$ wird interpretiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\psi}(t) = F(\psi(t))$$

mit Anfangsbedingung $\psi(0) = u$ am Zeitpunkt t : die zweite Bedingung besagt, dass ψ die Differentialgleichung löst, und die erste Bedingung besagt, dass der Anfangswert an $t = 0$ gleich u ist.

Die Differentialgleichung kann man auf einer Mannigfaltigkeit M auch leicht interpretieren: eine glatte Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ hat an jeder Stelle einen Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t) = (D_t \gamma) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_p M$ – die linke Seite hat somit eine Interpretation als Element in $T_p M$. Die rechte Seite soll dann durch Vorgabe eines Tangentialvektors an jedem Punkt auf M , d.h. eines Vektorfeldes auf M , bestimmt sein.

Somit lässt sich der obige Satz wie folgt auf Mannigfaltigkeiten interpretieren:

30.4.2 Satz: Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes

Sei M eine Mannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M . Dann existiert für jedes $q \in M$ eine Umgebung V von q , ein offenes Intervall $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\Phi: I \times V \rightarrow M$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi(0, p) = p$,
2. $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, p) := \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \right) (t, p) = X(\Phi(t, p))$.

Die Eindeutigkeit bedeutet hier: wenn $W_1, W_2 \subseteq W$ beliebige Teilmengen sind und die Abbildungen $\Phi_1: I_1 \times W_1 \rightarrow U$, $\Phi_2: I_2 \times W_2 \rightarrow U$ wie oben die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen, dann stimmen sie auf $I_1 \times W_1 \cap I_2 \times W_2$ überein.

Beweis:

Sei (U, x) eine Karte um q . Setze $G := x(U)$, $a := x(q)$,

$$F := (dx^1(X), \dots, dx^n(X)) \circ x^{-1}: G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und wende den vorigen Satz an, um eine Abbildung $\psi: I \times W \rightarrow G$ zu bekommen. Die Abbildung $\Phi := x^{-1} \circ \psi$ ist dann nach Konstruktion die gesuchte: die

Eigenschaften (1) und (2), geschrieben in Koordinaten mit Hilfe von x , sind genau die Bedingungen (1) und (2) des vorigen Satzes.

Die Abbildung Φ aus dem obigen Satz wird auch *lokaler Fluss* von X genannt. Für jedes $p \in V$ ist dann $\gamma(t) := \Phi(t, p)$ eine Kurve auf M , welche die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

sowie die Anfangsbedingung $\gamma(0) = p$ erfüllt. Solche Kurven heißen *Integralkurven* von X .

Der obige Satz ist eine lokale Aussage, und es besteht *a priori* keine Hoffnung, das "Zeitintervall" I vergrößern zu können: es gibt sogar im Eindimensionalen Differentialgleichungen, dessen Integralkurven in einer endlichen Zeit ins Unendliche laufen, z.B. $\dot{x} = x^2$ in \mathbb{R} (Übung: überzeugen Sie sich, dass die Integralkurven hier ins Unendliche in endlicher Zeit laufen und bestimmen Sie das zugehörige Vektorfeld!). Es gibt allerdings immer einen maximalen Definitionsbereich des Flusses:

30.4.3 Satz: Existenz und Eindeutigkeit des lokalen Flusses eines Vektorfeldes

Sei M eine Mannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M . Dann existiert eine eindeutig bestimmte maximale offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R} \times M$ mit $\{0\} \times M \subseteq W$ und eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\Phi: W \rightarrow M$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi(0, p) = p$,
2. $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, p) := (\Phi_* \frac{\partial}{\partial t})(t, p) = X(\Phi(t, p))$,
3. für jedes $p \in M$, $W \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = I_p \times \{p\}$, wobei $I_p \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I_p$ ist.

Beweis:

Der vorige Satz liefert die Existenz einer offenen Teilmenge

$$W_0 = \bigcup_{q \in M} I_q \times V_q$$

zusammen mit einer eindeutigen glatten Abbildung $\Phi: W_0 \rightarrow M$ mit gewünschten Eigenschaften (die Eindeutigkeitsaussage aus dem vorigen Satz impliziert, dass Φ wohldefiniert auf W_0 ist).

Sei nun $\mathcal{W} = \{(W, \Phi) \mid (W, \Phi) \text{ erfüllen (i), (ii), (iii)}\}$ die Familie von allen offenen Teilmengen, welche die Aussage des Satzes erfüllen. Wenn nun (W', Φ') und (W'', Φ'') zwei Elemente aus \mathcal{W} sind, folgt aus der Eindeutigkeit, dass Φ' und Φ'' auf $W' \cap W''$ übereinstimmen, weswegen sie sich zu einer eindeutig bestimmten glatten Abbildung $\Phi: W' \cup W'' \rightarrow M$ fortsetzen. Das ergibt, dass auf der Vereinigung

$$W := \bigcup_{(W', \Phi') \in \mathcal{W}} W'$$

eine glatte Abbildung $\Phi: W \rightarrow M$ durch $\Phi|_W := \Phi'$ wohldefiniert ist. Sie erfüllt offensichtlich die Aussage des Satzes.

30.4.4 Definition: maximaler Fluss

Die Abbildung $\Phi: W \rightarrow M$ heißt maximaler Fluss von X . X heißt vollständig, wenn $W = \mathbb{R} \times M$ ist, d.h. wenn der Fluss immer definiert ist.

30.4.5 Übung:

Zeigen Sie, dass jedes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig ist.

Sei X nun ein vollständiges Vektorfeld auf M . Wir definieren $\Phi_t: M \rightarrow M$ durch $\Phi_t(p) := \Phi(t, p)$ und beobachten folgende fundamentale Eigenschaft:

30.4.6 Proposition:

$$\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$$

Beweis:

Nach Definition ist $\Phi_{t_1+t_2}(p)$ der Wert an $t = t_1 + t_2$ der Integralkurve γ_p von X mit Anfangswert p . $\Phi_{t_2}(p)$ ist der Wert derselben Integralkurve an $t = t_2$, und $\Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(p))$ ist der Wert an $t = t_1$ der Integralkurve von X mit Anfangswert $\Phi_{t_2}(p)$. Nach Eindeutigkeit ist die letztere aber gleich $\gamma_p(t + t_2)$, und ihr Wert an t_1 ist $\gamma_p(t_1 + t_2)$, wie gewünscht.

30.4.7 Korollar

1. $\Phi_t: M \rightarrow M$ ist ein Diffeomorphismus für jedes $t \in \mathbb{R}$;
2. die Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$, $t \mapsto \Phi_t$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

30.4.8 Definition: Einparametergruppe

Eine glatte Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ mit $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$ ($\Phi_t(p) := \Phi(t, p)$) heißt eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen von M .

Gegeben eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen, bekommen wir das Vektorfeld X , welches sie erzeugt, auch zurück durch

$$X_p := \Phi_{*,(0,p)} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Dieses Vektorfeld hat nach Konstruktion Φ als zugehörigen maximalen Fluss: diese Gleichung ist genau die Bedingung (2) aus der Definition des Flusses eines Vektorfeldes. Somit haben wir festgestellt:

30.4.9 Proposition

Es gibt eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Einparametergruppen von Diffeomorphismen von M und vollständigen Vektorfeldern auf M .

31 Vektorfelder und Flüsse

31.1 Definition

Ein Vektorfeld X auf M heißt *vollständig*, wenn der maximale Fluss von X auf ganz $\mathbb{R} \times M$ definiert ist (=Integralkurven existieren ewig)

31.2 Beispiel

$M = \mathbb{R}$, $X = \xi(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, DGL: $\dot{X} = \xi(x)$ beschreibt den Fluss

TODO Bildchen 23

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ dx &= x^2 dt \\ \frac{dx}{x^2} &= dt \\ -\frac{1}{x} &= t + c \\ x &= -\frac{1}{t + c} \\ x(0) &= x_0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{c} \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Integralkurve mit $x(0) = x_0$ sieht so aus:

$$x(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

31.3 Bemerkung

Für dieses Gegenbeispiel ist es wichtig, dass \mathbb{R} nicht kompakt ist.

31.4 Übung

Jedes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Sei X ein vollständiges Vektorfeld, definiere

$$\phi_t : M \rightarrow M : p \mapsto \underbrace{\phi}_{\text{Fluss von } X}(t, p), \quad t \in \mathbb{R}$$

31.5 Proposition

Es gibt $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Beweis:

$\phi_{t_1+t_2}(p)$ ist der Wert an $t = t_1 + t_2$ der Integralkurve $\gamma_p(t)$ von X mit $\gamma_p(0) = p$ (entsprechend für $\phi_{t_2}(p)$)

$\phi_{t_1}(\phi_{t_2}(p))$ ist der Wert an $t = t_1$ der Integralkurve $\gamma_{\phi_{t_2}(p)}(t)$ mit Anfangswert $\phi_{t_2}(p)$

TODO Bildchen 24

Nach Eigenschaft ist $\gamma_{\phi_{t_2}(p)}(t) = \gamma_p(t + t_2)$. Ihr Wert an $t = t_1$ ist genau $\gamma_p(t_1 + t_2) = \phi_{t_1+t_2}(p)$

31.6 Korollar

$$\phi_t: M \rightarrow M$$

ist ein Diffeomorphismus für jedes $t \in \mathbb{R}$. ($\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}$)

31.7 Korollar

$$\phi: \begin{cases} (\mathbb{R}, t) & \rightarrow \text{Diff}(M) \\ t & \mapsto \phi_t \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

(= $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen)

31.8 Lemma

Wenn $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ eine glatte Abbildung ist, so dass

1. $\forall t \in \mathbb{R}: \phi_t: \begin{cases} M & \rightarrow M \\ p & \mapsto \phi(t, p) \end{cases}$ Diffeomorphismus
2. $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vollständiges Vektorfeld X auf M , dessen Fluss ϕ ist.

Beweis:

$$X(p) := \left. \frac{\partial \phi_t(p)}{\partial t} \right|_{t=0}$$

32 10 Lie-Gruppen

32.1 Beispiel

Sei

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{offen}$$

\Rightarrow Mannigfaltigkeit

Gleichzeitig ist es aber eine Gruppe:

$$m : \begin{cases} \text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \text{GL}(n, \mathbb{R}) & \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto A \cdot B \end{cases}$$
$$i : \begin{cases} \text{GL}(n, \mathbb{R}) & \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}$$

32.2 Behauptung

m, i sind glatt

- $(m(A, B))_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk} \rightarrow$ glatte Pkte von A_{ij}, B_{jk} (sogar Polynome!)
- $(i(A))_{ij} = \frac{\text{Cof}(A)_{ji}}{\det A}$

$$\text{Cof}(A)_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

32.3 Definition

Eine Lie-Gruppe G ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit glatten Abbildungen

- $G \times G \rightarrow G, (\cdot)^{-1}: G \times G \rightarrow G$ so dass $(G, \bullet, (\cdot)^{-1})$ eine Gruppe ist

32.4 Beispiel

- $\text{GL}(n, \mathbb{R}), \text{GL}(n, \mathbb{C})$ sind Lie-Gruppen
- $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Lie-Gruppe
- $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ ist eine Lie-Gruppe (Da Multiplikation und Invertieren von $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ vererbt sind, reicht es zu zeigen, dass $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq \text{GL}_n \mathbb{R}$ eine Untermannigfaltigkeit ist.) Dazu: benutze Satz von regulären Wert. Zu zeigen: $\forall A \in SL_n(\mathbb{R})$ gilt: $D_A \det$ hat vollen Rang (= 1) $\Leftrightarrow D_A \det \neq 0$

Sei $X \in T_A \mathbb{R}^{n^2}$.

$$\begin{aligned} D_A \det(X) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(A + \varepsilon X) - \det(A)}{\varepsilon} \\ &= \det(A) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbb{1} + \varepsilon \overbrace{A^{-1}X}^{=:Y}) - 1}{\varepsilon} \\ &= \det(A) \cdot T_r(A^{-1}X) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbb{1} + \varepsilon Y) &= \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon y_{11} & \cdots & \varepsilon y_{1n} \\ \varepsilon y_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon y_{n1} & \cdots & 1 + \varepsilon y_{nn} \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Leibnitz}}{=} \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon y_{ii}) + \varepsilon^2(\dots) \\
 &= 1 + \varepsilon(y_{11} + \dots + y_{nn}) + \varepsilon^2(\dots) \\
 &= 1 + \varepsilon \cdot \text{Spur}(Y)
 \end{aligned}$$

Somit hat $D_A \det$ tatsächlich Rang 1, weil zum Beispiel:

$$D_A \det(A) = n$$

- $O(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$
 $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$
- $U(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbb{1}\}$
 $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$
- $O(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$
 $SO(n, \mathbb{C}) = \{A \in O(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$
- $O(p, q) = \{A \in \mathbb{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle_{p,q} = \langle x, y \rangle_{p,q}\}$ mit

$$\langle x, y \rangle_{p,q} := \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{j=1}^q x_{p+j} y_{p+j} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Beispielsweise: $O(1, 3)$ erhält die quadratische Form $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (Minkowsky-Raum, SRT)

- $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq C^x$, $S^1 = U(1)$
- $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n$ ist auch eine Lie-Gruppe

32.5 Satz: Cartan

Sei G eine Lie-Gruppe, $H \trianglelefteq G$ eine abgeschlossene (bzgl Topologie auf G) Untergruppe. $\Rightarrow H$ ist eine Untermannigfaltigkeit (und somit automatisch eine Lie-(Unter)gruppe)

32.6 Frage

Warum ist $SO(n)$ zusammenhängend?

32.7 Erinnerung

$G \overset{\alpha}{\curvearrowright} X$ Gruppenwirkung $\Leftrightarrow G \overset{\alpha}{\rightarrow} \text{Sym}(X)$ Homomorphismus

32.8 Definition

Sei G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit. Eine (glatte) Wirkung $G \curvearrowright M$ ist ein Homomorphismus $\alpha: G \rightarrow \text{Diff}(M)$

32.9 Idee: „Erlangen-Programm“ 1872, Felix Klein

Studiere Mannigfaltigkeit durch ihre Symmetriegruppen $(S^n, d) \subseteq (\mathbb{R}^{n+1}, d_{\text{euklidische}})$ mit der „runden Metrik“ (euklidische Metrik)

32.10 Fakt

$$\underbrace{S^n, d}_{\text{Isometrien}} \cong \underbrace{O}_{\text{orthogonale Matrizen}}(n+1)$$

(insbesondere: $O(n+1) \curvearrowright S^n$ wirkt transitiv)

$G \curvearrowright X$ transitiv

$$x \in X : \begin{cases} G & \rightarrow X \\ g & \mapsto gx \end{cases}$$

$$H = \{g \in G \mid gx = x\} =: \text{Stab}(x)$$

$$\begin{array}{ccc} H & \trianglelefteq & G \\ G & \curvearrowright & G/H \\ \alpha_g(kH) & = & gkH \end{array}$$

32.11 Satz: Hauptsatz über Wirkungen

jede transitive Wirkung ($G \curvearrowright X$) ist isomorph zu einer Wirkung ($G \curvearrowright G/H$) für eine Untergruppe H . Der Isomorphismus geht so: Wähle: „Anfangspunkt“ $x \in X$, $H := \text{Stab}(x)$. Der Isomorphismus ist:

$$gH \mapsto gx$$

$O(n+1) \curvearrowright S^n$ transitiv,

$$\text{Stab}((1, 0, \dots, 0)^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & O(n) & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \cong O(n)$$

\Rightarrow

$$S^n \stackrel{\text{als Menge}}{\cong} O(n+1)/O(n)$$

Alternativ: $S^n \cong \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$ (gleiches Argument, wähle positiv orientierte Basis)

Beobachtung: S^n ^{des topologischen Raums} $\cong \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$ zusammenhängend.

32.12 Frage

Sei G Lie-Gruppe, $H \trianglelefteq G$ Lie-Untergruppe. Wie macht man G/H zu einer Mannigfaltigkeit?

1. Topologie: Quotiententopologie: haben $q: G \rightarrow G/H$. Definiere

$$\tau := \{U \subseteq G/H \mid q^{-1}(U) \text{ offen}\}$$

2. glatte Struktur: kommt später

32.13 Erinnerung

zusammenhängend = nicht zerlegbar in zwei (disjunkte) nicht leere offene Teilmengen

32.14 Lemma

Sei G Lie-Gruppe, $H \trianglelefteq G$ abgeschlossene Untergruppe. Sind $H, G/H$ zusammenhängend, so ist auch G zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen: $G = A \sqcup B$, A, B offen, nicht leer oBdA sei $1 \in A$. Jede Nebenklasse gH ist zusammenhängend (wie H), $gH = (gH \cap A) \sqcup (gH \cap B) \Rightarrow$ eins davon ist leer. \Rightarrow jede Nebenklasse von H liegt vollständig in A oder vollständig in B .

Nun gilt $G \stackrel{\text{als Menge}}{=} \bigsqcup_{[g] \in G/H} gH$

$\Rightarrow q(A) \sqcup q(B) = G/H$ ist disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen, weil

$$q^{-1}(q(A)) = A, \quad q^{-1}(q(B)) = B \quad \Rightarrow f' \text{ zu } G/H \text{ zusammenhängend}$$

32.15 Behauptung

$\text{SO}(n)$ zusammenhängend $\forall n \geq 1$

Beweis:

Induktion:

- $n = 1$: $\text{SO}(1) = \{1\}$ ✓
- $n \neq 1$: $\text{SO}(n+1)/\text{SO}(n) \cong S^k$ zusammenhängend $\Rightarrow \Rightarrow \text{SO}(n+1)$ zusammenhängend.

33 Linksinvariante Vektorfelder auf Lie-Gruppen

33.1 Lemma

Sei G eine Lie-Gruppe. Das Tangentialbündel von G ist trivial: $TG \cong G \times T_1G$.

Beweis:

Für jedes $g \in G$ ist die *Lie-Linksverschiebung*

$$L_g: \begin{cases} G & \rightarrow G \\ h & \mapsto gh \end{cases}$$

ein Diffeomorphismus.

Wenn $\xi \in T_1G \Rightarrow X_\xi \in \Gamma(TG)$ heißt das linksinvariante Vektorfeld zu ξ . Sie nun $\psi: G \times T_1G \rightarrow TG$, $(g, \xi) \mapsto (L_g)_*(\xi) = X_\xi(g)$

33.2 Behauptung

ψ ist Diffeomorphismus

Beweis:

Die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} TG & \rightarrow G \times T_1G \\ v & \mapsto (\pi(v), (L_{\pi(v)^{-1}})_*v) \end{cases}$$

ist ψ^{-1} .

33.3 Definition

Das Vektorfeld X_ξ , $g \mapsto (L_g)_*(\xi)$ heißt das *linksinvariante Vektorfeld* zu $\xi \in T_1G$.

33.4 Definition

Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TG)$ heißt *linksinvariant*, wenn

$$\forall h \in G : (L_h)_*X = X, \quad \text{d.h.} \quad (L_h)_*X(g) = X(L_hg) = X(hg)$$

33.5 Lemma

X_ξ ist linksinvariant

Beweis:

$$(L_h)_*X_\xi(g) = (L_h)_*(L_g)_*\xi = (L_{hg})_*\xi = X_{xi}(hg)$$

33.6 Lemma

Jedes linksinvariante Vektorfeld $X \in \Gamma(TG)$ ist von der Form X_ξ für ein eindeutig bestimmtes $\xi \in T_1G$.

Genauer: Die Ausertungsabbildung $ev_1: \{ \text{linksinvariantes Vektorfeld} \} \rightarrow T_1G$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis:

Die Abbildung $\xi \mapsto X_\xi$ ist invers zu ev_1 :

- injektiv: weil $X_\xi(1) = \xi$
- surjektiv: wenn X linksinvariant ist, gilt $X(g) = (L_g)_*X(1) \Rightarrow X = X_{X(1)}$

33.7 Beispiel

- $(\mathbb{R}^n, +)$: linksinvariant $\hat{=}$ konstant TODO Bildchen 25
- $(\mathbb{R}_+^\times, \cdot)$: $(L_\alpha)_* = a$ TODO Bildchen 26
- $(U(1), \cdot) \cong (S^1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ TODO Bildchen 27
- $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$: $(L_z)_* = z$ TODO Bildchen 28

Letztes Mal: linksinvariante Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe eingeführt.

$X \in \Gamma(TG)$ ist linksinvariant, wenn:

$$\begin{aligned} \forall g \in G : (L_g)_* X &= X \\ [\underbrace{(L_g)_* X(h)}_{\in T_{gh}} &= \underbrace{X(gh)}_{\in T_{gh}G}, g, h \in G] \end{aligned}$$

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $G \trianglelefteq \text{GL}(n, \mathbb{K}) \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{K}^{n^2}$. Wir benutzen die Einträge der Matrix als Koordinaten. D.h. $X \in \Gamma(TG)$ wird eindeutig beschrieben durch eine Funktion

$$\hat{X} : G \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

welche \hat{X} entsprechen linksinvarianten Vektorfeldern?

Erinnerung: wenn X linksinvariant ist, ist es eindeutig durch $X(1) \in T_1G$ bestimmt $\rightsquigarrow \hat{X}$ ist eindeutig durch

$$\hat{X}(1) =: A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

bestimmt.

$$\hat{X}(g) = (L_g)_* \hat{X}(1) = (L_g)_* A = g \cdot A$$

da L_g Matrizenmultiplikation von links ($g \in \text{GL}(n, K)$)

$$L_g : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ Y & \mapsto gY \end{cases}$$

linear: $(L_g)_* = g$

Fazit:

linksinvariante Vektorfelder sind alle von der Form $\hat{X}(g) = gA$

$$A \in T_1G \subseteq T_1 \text{GL}(n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

34 Lie-Algebren

34.1 Erinnerung/Übung

$$\begin{aligned} \Gamma(TM) &\cong \text{Der}(C^\infty(M)) & [4] \\ \delta_1, \delta_2 \in \text{Der}(A) &\Rightarrow [\delta_1, \delta_2] \in \text{Der}(A) & [2] \\ \delta_1, [\delta_2, \delta_3] + [\delta_2, [\delta_3, \delta_1]] + [\delta_3, [\delta_1, \delta_2]] & & (\text{Jacobi-Identität}) \end{aligned}$$

34.2 Definition

Eine Lie-Algebra $(V, [\cdot, \cdot])$ ist ein Vektorraum V zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$, die Jacobi-Identität erfüllt:

$$[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0 \quad (v_1, v_2, v_3 \in V)$$

34.3 Beispiele

1. $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $[A, B] = AB - BA$ ist eine Lie-Algebra
2. A assoziative \mathbb{K} -Algebra $[a, b] := ab - ba$
3. [Übung 2] $\text{Der}(A)$ ist eine Lie-Algebra, wenn A eine assoziative Algebra (mit Einselement) ist.
4. $\Gamma(TM) \cong \text{Der}(C^\infty(M))$ ist eine Lie-Algebra Lemma: Sei G eine Lie-Gruppe, $X, Y \in \Gamma(TG)$ linksinvariant. Dann ist $[X, Y]$ auch linksinvariant
Beweis: Sei $Z \in \Gamma(TG)$, $\varphi \in C^\infty(G)$.

$$\begin{aligned} \underbrace{[(L_g)_*Z](\varphi)}_{=:gk}(\underbrace{h}_{\in T_h G}) &\stackrel{?}{=} \underbrace{[(L_g)_*(Z)](h)}_{\in T_h G}(\varphi) \\ &= [(L_g)_*(Z(g^{-1}h))](\varphi) \\ &= \underbrace{(Z(g^{-1}h))}_{=:k}(L_g^*\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_g^*[(L_g)_*Z](\varphi)(k) &= (L_g^*(\psi))(k) \\ &= \underbrace{[(L_g)_*Z](\varphi)}_{=: \psi, \text{ Funktion}}(L_g(k)) \\ &= (Z(k))(L_g^*\varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_g^*[(L_g)_*Z](\varphi) = Z(L_g^*\varphi)$$

$$\Rightarrow (L_g)_x Z = L_{g^{-1}}^* \circ Z \circ L_g^*$$

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \xrightarrow[\cong]{L_g^*} & C^\infty(M) \\ Z \downarrow & & \downarrow ? \quad \text{hier steht } (L_g)_*Z \\ C^\infty(M) & \xleftarrow[\cong]{L_g^*} & C^\infty(M) \end{array}$$

Weiter:

$$\begin{aligned} ((L_g)_*[X, Y])(\varphi) &= (L_{g^{-1}}^* \circ [X, Y] \circ L_g^*)(\varphi) \\ &= L_{g^{-1}}^*([X, Y](L_g^*(\varphi))) \\ &= L_{g^{-1}}^*(X(Y(L_g^*\varphi)) - Y(X(L_g^*\varphi))) \\ &= L_{g^{-1}}^*[\underbrace{(X \circ L_g^* \circ L_{g^{-1}}^* \circ X \circ L_g^*)}_{=: (L_g)_*Y=Y}(\varphi) - \underbrace{(Y \circ L_g^* \circ L_{g^{-1}}^* \circ X \circ L_g^*)}_{=: (L_g)_*X=X}(\varphi)] \\ &= \underbrace{(L_{g^{-1}}^* \circ X \circ L_g^*)}_{=: (L_g)_*X=X}(Y(\varphi)) - \underbrace{(L_{g^{-1}}^* \circ Y \circ L_g^*)}_{=: (L_g)_*Y=Y}(X(\varphi)) \\ &= (X \circ Y)(\varphi) - (Y \circ X)(\varphi) = [X, Y](\varphi) \end{aligned}$$

5. Die linksinvarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe:

Vorsicht!

$$(L_g)_*Z \in \Gamma(TG), \quad \text{wenn } Z \in \Gamma(TG)$$

Das funktioniert nur weil $L_g: G \rightarrow G$ ein Diffeomorphismus ist.

Wenn $f: M \rightarrow N$ irgendeine glatte Abbildung ist

$$X \in \Gamma(TM) \rightarrow f_*X$$

kein Vektorfeld, ($X \leftarrow$ Objekt unbekannter Natur :-)

$$f_*X(n) \stackrel{?!}{=} f_*(X(f^{-1}(n))) \quad \leftarrow \text{iA. nicht wohldefiniert}$$

34.4 Definition

Sei G eine Lie-Gruppe. Die Lie-Algebra von G genannt $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ (Fraktur g) ist die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder auf G .

34.5 Erinnerung

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\text{ev}_1]{\cong} T_1G \Rightarrow \dim \mathfrak{g} = \dim G$$

Sei $G \leq \text{GL}(n, \mathbb{K})$ eine Lie-Untergruppe. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \cong T_1G \subseteq T_1 \text{GL}(n, \mathbb{K}) \cong & \text{M}_n(\mathbb{K}) \\ \hat{X}_A(g) = gA & \mapsto & A \end{array}$$

34.6 Proposition

Die obige Abbildung identifiziert $(g, [\cdot, \cdot])$ mit einer Lie-Untergruppe von $(\text{M}_n(\mathbb{K}), \underbrace{[\cdot, \cdot]}_{\text{Kommutator von Matrizen}})$

Beweis:

Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$. Diese Vektorfelder, in Koordinaten geschrieben, entsprechen

$$\hat{X}: g \mapsto gA \text{ bzw. } \hat{Y}: g \mapsto gB$$

Wir wollen $\widehat{[X, Y]}$ berechnen:

TODO Chaos an der Tafel

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i,j,k,l} \left[(gA)_{ij} \frac{\partial}{\partial g^{ij}}, (gB)_{kl} \frac{\partial}{\partial g^{kl}} \right] \\ &= \widehat{[X, Y]} = X(\hat{Y}) - Y(\hat{X}) \\ &= X(\hat{Y})_l = X(Y_l) = \sum_{i=1}^k X_i \frac{\partial Y_l}{\partial x^i} \\ &= Y(\hat{X})_l = \dots \\ &\rightarrow \text{Übung 3} \end{aligned}$$

$$X = \sum_{i,j=1}^n (gA)_{ij} \frac{\partial}{\partial g^{ij}} \quad \text{Übung 3}$$

$$\begin{aligned} [X(\hat{Y}) - Y(\hat{X})](g) &= [X(\hat{Y}) - Y(\hat{X})](g) \\ &= (Dg\hat{Y})(\hat{X}(g)) - (Dg\hat{X})(\hat{Y}(g)) \\ Dg(\hat{Y}) = Dg(g \mapsto gB) &= \text{Rechtsmultiplikation mit } B \\ &= \hat{X}(g) \cdot B - \hat{Y}(g) \cdot A \\ &= g(AB - BA) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{[X, Y]}(1) = AB - BA = [A, B]_{[\mathbb{M}_n(K)]}$$

34.7 Beispiel

1. $\text{Lie}(\text{GL}(n, \mathbb{K})) =: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \cong (\mathbb{M}_n(\mathbb{K}), [\cdot, \cdot])$ (folgt aus Proposition)
2. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) := \text{Lie}(\text{SL}(n, \mathbb{K}))$

Brauchen $T_1 \text{SL}(n, \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ auszwechnen

$$\text{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\} = \det^{-1}(1)$$

1 ist regulärer Wert von \det .

Übung 8:

$$T_1 \text{SL}(n, \mathbb{K}) \cong \text{Ker } D_1 \det = \ker(T_r : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) &= \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \mid T_r(A) = 0\} \\ ([\mathfrak{sl}Y, \mathfrak{sl}Y] &\subseteq \mathfrak{sl}Y, \text{ da } T_r([A, B]) = 0) \end{aligned}$$

3.

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) \cong T_1 O(n, \mathbb{K}) = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma: I \rightarrow O(n, \mathbb{K}), \gamma(0) \underset{(*)}{=} \mathbf{1}\}$$

Sei $\gamma: I \rightarrow O(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \gamma(t)^T \gamma(t) = 1$.

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\gamma(t)^T \gamma(t)) = \dot{\gamma}(0)^T \cdot \gamma(0) + \gamma(0)^T \cdot \dot{\gamma}(0) \stackrel{(*)}{=} \dot{\gamma}(0)^T + \gamma(0)$$

das heißt:

$$T_1 O(n, \mathbb{K})$$

mit $A + A^T = 0$ folgt:

$$\gamma_A(t) := \exp(tA) \in O(n, \mathbb{K})$$

da

$$\begin{aligned} \exp(tA)^T \cdot \exp(tA) &= \exp(tA^T) \cdot \exp(tA) \\ &\stackrel{?}{=} \exp(-tA) \cdot \exp(tA) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_A(0) = A, \quad \gamma_A(0) = \mathbb{1}$$

(oder nutze Satz vom regulären Wert)

4.

$$\mathfrak{so}(3) := \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \cong T_1 \text{SO}(3) \cong T_1 O(3)$$

da

$$O(3) = \text{SO}(3) \dot{\cup} (-\text{SO}(3))$$

zwei Zusammenhangskomponenten.

$$\begin{aligned} T_1 O(3) &= \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : A^T = -A\} \\ &= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: L_x}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: L_y}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: L_z} \right\rangle \\ &= \langle L_x, L_y, L_z \rangle \end{aligned}$$

$$\exp(t \cdot L_z) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung du vorherigem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{t^{2l}}{(2l)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[L_x, L_y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_z$$

$$[L_y, L_z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_x$$

$$[L_z, L_x] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_y$$

„infinitesimale Rotation“

5. $\mathfrak{su}(2) = T_1 \text{SU}(2)$

$$\begin{aligned} \text{SU}(2) &= \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^*A = \mathbb{1}, \det A = 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \mid X^2 = -X, \text{Tr}(X) = 0\} \\ &\cong \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{=:x_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:x_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & +i \end{pmatrix}}_{=:x_1} \right\rangle \\ &= \langle x_3, x_2, x_1 \rangle \end{aligned}$$

$$[x_1, x_2] = \begin{pmatrix} +i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & +i \end{pmatrix} = 2x_3$$

$$[x_2, x_3] \stackrel{\text{analog}}{=} 2x_1$$

$$[x_3, x_3] \stackrel{\text{analog zur analogen Herangehensweise vom vorherigen}}{=} 2x_2$$

$$\begin{aligned} \exp(tx_3) &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} =: g_t \in \text{SU}(2) \\ &= g_t x_3 g_t^{-1} = x_3 \\ &= g_t x_1 g_t^{-1} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{it} \\ ie^{-it} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{2it} \\ ie^{-2it} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos(2t) \cdot x_1 + \sin(2t) \cdot x_2 \end{aligned}$$

Analog:

$$g_t x_2 g_t^{-1} = \cos(2t)x_2 - \sin(2t)x_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{M_{x_1, x_2, x_3}}_{\text{darstellende Matrix}} (g_t(\cdot)g_t^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin 2t & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X, Y \in \mathfrak{SU}(2)$

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2} \text{Tr}(X \cdot Y^*) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(X \cdot Y)$$

ist Skalarprodukt, da $\text{Tr}(\underbrace{XX^*}_{\text{positiv semidefinit}}) \geq 0$. x_1, x_2, x_3 ist Orthogonalbasis (ONB) $\Rightarrow (\mathfrak{su}(2), \langle \cdot, \cdot \rangle) \cong (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Sei $g \in \text{SU}(2)$

$$\rightarrow \text{Ad}(g): \begin{cases} \mathfrak{su}(2) & \rightarrow \mathfrak{su}(2) \\ X & \mapsto gXg^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr}(gXg^{-1} \cdot (gYg^{-1})^*) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}(gX \underbrace{g^{-1}(g^{-1})^*}_{=1, \text{ da } g \in \text{SU}(2)} Y^*g^*) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}(gXY^*g^*) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}(XY^*)
\end{aligned}$$

Übung:

$$\det \text{Ad}(g) = 1$$

Ad: $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ ist Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned}
\text{Ker Ad} &= \{g \in \text{SU}(2) \mid gXg^{-1} = X\}, \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \text{SU}(2) \right\} \\
&= \{\pm 1\}
\end{aligned}$$

Ad ist surjektiv: Alle Rotationen um x -, y -, z -Achse sind im Bild:

→ erzeugen $\text{SO}(3)$

Letztes Mal:

$$\text{SU}(2) \xrightarrow[2:1]{\psi} \text{SO}(3), \quad \text{Ker}(\psi) = \{\pm 1\}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{su}(2) &= \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\
[u_1, u_2] &= 2u_3 \\
[u_2, u_3] &= 2u_1 \\
[u_3, u_1] &= 2u_2
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{su}(3) = \langle L_x, L_y, L_z \rangle \quad [L_x, L_y] = L_z$$

Fazit:

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \quad \text{als Lie-Algebren}$$

$$\begin{aligned}
D_1\psi &= \psi_*: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3) \\
u_{1/2} &\mapsto L_1 \\
u_{2/2} &\mapsto L_2 \\
u_{3/2} &\mapsto L_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_*(u_3) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi(e^{tu_3}) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2L_z
\end{aligned}$$

(analog für u_1, u_2)

insbesondere gibt es unterschiedliche Lie-Gruppen, die isomorphe Lie-Algebren haben.

noch einfacheres Beispiel: $(\mathbb{R}, +)$ und $(U(1), \cdot)$ sind nicht isomorph aber $\text{Lie}(\mathbb{R}, +) \cong \text{Lie}(U(1), \cdot) \cong \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} U(1) \\ t & \mapsto e^{2\pi it} \end{cases}$$

$$\text{Ker } \psi = \mathbb{Z}, \quad U(1) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

\mathbb{R} : Schraube

ψ : Projektion von Schraube auf Kreis

TODO Bildchen 29

Die Lie-Algebra weiß nur was lokal los ist und sieht nicht, dass $U(1)$ ein Kreis ist und R ins unendliche geht.

$$\begin{aligned}
\text{SU}(2) &\cong S^3 \\
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &\mapsto (\alpha, \gamma) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

$$\text{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1, \quad \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta = 0 \\ |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{array} \right\}$$

Injektivität:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ ist schon eindeutig, da orthogonal und Richtung kommt aus Determinante.

$$\text{SU}(2)/\{\pm i\} = \text{SO}(3)$$

34.8 Frage

Was ist $S^3/\{\pm \text{id}\}$?

TODO Bildchen 30

der Projektive Raum!

34.9 Intermezzo: projektiver Raum

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n \stackrel{\text{diffgeo}}{:=} S^n / \{\pm \text{id}\} \quad \text{Mannigfaltigkeit, kompakt}$$

Sei ein \mathbb{K} ein Körper. Der (n -dimensionale) *projektive Raum* über \mathbb{K}

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\mathbb{P}^n &= \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \{x \mid x \text{ ist 1-dimensionaler Unterraum in } \mathbb{K}^{n+1}\} \\ &\cong (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \\ &= \{[x_0, \dots, x_n] \mid [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n] = [x_0, \dots, x_n]\} \\ &= [x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} v \sim w &:\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : v = \lambda w \\ (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim &\stackrel{\cong}{\rightarrow} \{x \mid x \text{ ist 1-dimensionaler Unterraum in } \mathbb{K}^{n+1}\} \\ [v] &\mapsto \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\mathbb{P}^n &= \{[x_0 : \dots : x_{n-1} : 1] \mid x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{K}\} \dot{\cup} \{[x_0 : \dots : x_{n-1}] \mid [x_0 : \dots : x_{n-1}] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}\} \\ &= \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}, \quad \mathbb{K}\mathbb{P}^0 = \{*\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^1 = S^1 / \{\pm \text{id}\} \cong S^1 \cong \mathbb{R} \dot{\cup} \{*\}$$

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \dot{\cup} \{\infty\} \cong S^2 \quad \text{Riemannsphäre}$$

TODO Bildchen 31

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \dot{\cup} \mathbb{R}\mathbb{P}^1$$

TODO Bildchen 32

Also gilt:

$$\text{SO}(3) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^3$$

Im folgenden sei M ein Mannigfaltigkeit, zusammenhängend, $x_0 \in M$ beliebig.

34.10 Definition: Schleifen, Homotopien

- Eine *Schleife* $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ an x_0 ist eine stetige Abbildung

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$$

TODO Bildchen 33

- Eine Schleife $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ heißt *nullhomotop* oder *zusammenziehbar*, wenn

$$\exists H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

mit

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \gamma(t) \\ H(1, t) &= x_0 \end{aligned}$$

H heißt *Homotopie*

34.11 Definition: einfach zusammenhängend

M heißt einfach zusammenhängend, wenn alle Schleifen zusammenziehbar sind.

34.12 Beispiel

- \mathbb{R} ist einfach zusammenhängend.
- S^n ist einfach zusammenhängend, $n \geq 2$
- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $S^1 \cong U(1)$ nicht einfach zusammenhängend

34.13 Satz: Lie-Algebra \rightsquigarrow Lie-Gruppe

Zu jeder (endliche dimensionalen) Lie-Algebra \mathfrak{g} existiert eine eindeutige bestimmte einfach zusammenhängende Lie-Gruppe G mit

$$\text{Lie} \cong \mathfrak{g}$$

$$S^n = \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$$

34.14 Frage

Sei G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit, $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ durch Diffeomorphismen $\Leftrightarrow \alpha: G \rightarrow \text{Diff}(M)$

Warum ist M/G eine Mannigfaltigkeit?

$$M/G = \{\mathcal{O}_m \mid m \in M\}, \quad \mathcal{O}_m := G \text{ cot } m = \{(\alpha(g))(m) \mid g \in G\}$$

34.15 Beispiel

$$M = \mathbb{R}^2, \quad G = \mathbb{Z} / 3 \mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$$

durch Rotation

TODO Bildchen 34

Stabilisatoren sind böse!

$$M/G \text{ TODO Bildchen 35}$$

Sei $G \curvearrowright M$ eine Wirkung [ab jetzt: Wirkung stets glatt!]

$$\hat{\alpha}: \begin{cases} G \times M & \rightarrow M \\ (g, m) & \mapsto (\alpha(g))(m) \end{cases}$$

Sei $m \in M$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_m: G &\rightarrow M \\ g &\mapsto (\alpha(g))(m) \\ \rightsquigarrow D_1\psi_m: \mathfrak{g} &\rightarrow T_m M \end{aligned}$$

34.16 Definition

Das Killing-Vektorfeld zur Wirkung α und einem Element $\xi \in \mathfrak{g}$ ist $m \mapsto D_1\psi_m(\xi)$

34.17 Beispiel

TODO Bildchen 36

$X \in \Gamma(T\Pi^2)$ definiert eine Wirkung (vgl. Hausaufgabe)

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\curvearrowright \Pi^2 \\ t &\mapsto \phi_t \end{aligned}$$

(α, β) \mathbb{Q} -linear unabhängig \Rightarrow die Orbits sind nicht geschlossen und sogar dicht in Π^2 !

Betrachte Π^2/\mathbb{R} mit Quotiententopologie: $U \subseteq \Pi^2/\mathbb{R}$ offen, nicht leer, dann:

$$\exists [m] \in U \Rightarrow \mathcal{O} \subseteq q^{-1}(U) \text{ offen}$$

Wenn $[m'] \neq [m] \in \Pi^2/\mathbb{R}$

- $\Rightarrow \mathcal{O}_m, \mathcal{O}_m$ sind beide dicht
- \Rightarrow wenn $U' \ni [m']$ eine Umgebung von $[m']$ ist,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{O}_m &\subseteq q^{-1}(U') \\ \mathcal{O}_m &\subseteq q^{-1}(U) \end{aligned} \right\} \text{offen in } \Pi^2$$

- $\Rightarrow \mathcal{O}_m \cap q^{-1}(U') \neq \emptyset$, weil \mathcal{O}_m dicht
- $\Rightarrow [m] \in U'$

34.18 Definition

Seien X, Y topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig. f heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind:

$$K \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(K) \subseteq X \text{ kompakt}$$

34.19 Definition

Eine Lie-Gruppenwirkung $G \curvearrowright^\alpha M$ heißt *eigentlich*, wenn die Abbildung

$$\begin{cases} G \times M \rightarrow M \times M \\ (g, m) \mapsto ((\alpha(g))(m), m) \end{cases}$$

eigentlich ist.

34.20 Erinnerung

$G \curvearrowright$ heißt frei, wenn $\text{Stab}(m) = \{1\}$, $m \in M$

$$(\Leftrightarrow \forall g \neq 1 \forall m \in M (\alpha(g))(m) \neq m)$$

34.21 Beispiel

G ist kompakt \Rightarrow jede Wirkung $G \curvearrowright M$ ist eigentlich, wenn $K \subseteq M \times M$ kompakt, ist $\pi_2(K) \subseteq M$ kompakt

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(K) \subseteq G \times \pi_2(K) \text{ kompakt}$$

34.22 Beobachtung

$G \curvearrowright M$ eigentlich $\rightarrow \text{Stab}(M) \leq G$ kompakt für jedes $m \in M$:

$$\text{Stab}(m) \times \{m\} = \varphi^{-1}(\{(m, m)\})$$

34.23 Proposition

Sei $G \curvearrowright M$ eine freie und eigentlich Wirkung. Der Quotient M/G hat eine eindeutig bestimmte glatte Struktur, so dass $q: M \rightarrow M/G$ eine Submersion ist.

Beweis:

Betrachte:

$$\psi_m: \begin{cases} G & \rightarrow M \\ g & \mapsto gm \end{cases}$$

Das ist eine glatte Abbildung.

Behauptung:

$$\text{Rang } D_g \psi_m = \text{const} \quad \text{unabhängig von } g$$

Das liegt daran, dass $hg \xrightarrow{\psi_m} hgm$

- $\Rightarrow \underbrace{\psi_m(hg)}_{=\psi_m(L_k(g))} = \underbrace{h \cdot \psi_m(g)}_{=\alpha_k(\psi_m(g))}$
- $\Leftrightarrow \psi_m \circ L_k = \alpha_h \circ \psi_m \Leftrightarrow \psi_m = \alpha_h \circ \psi_m \circ L_k^{-1}$
- $\Rightarrow D_g \psi_m = D_g(\alpha_h \circ \psi_m \circ L_k^{-1}) = \underbrace{D_{h^{-1}gm} \alpha_h}_{\text{invertierbar}} \circ D_{h^{-1}g} \psi_m \circ \underbrace{D_g L_h^{-1}}_{\text{invertierbar}}$
- $\Rightarrow \text{Rang } D_g \psi_m = \text{Rang } D_{h^{-1}g} \psi_m$

Daher ist das Bild von der glatten Abbildung $\psi_m: G \rightarrow M$ lokal (z.B. an $1 \in G$) eine Untermannigfaltigkeit [z.B. weil es in lokalen Koordinaten wie ein Graph einer glatten Funktion aussieht]

Wenn $U \in G$ eine Umgebung von 1 ist, dann ist $\psi_m(U)U \cdot m \subseteq \mathcal{O}_m$ eine Umgebung um m in \mathcal{O}_m

Daher ist

$$T_m \mathcal{O}_m = D_1 \psi_m \underbrace{(T_1 G)}_{=g} = \{K_\xi(m) \mid \xi \in G\}$$

Wir behaupten nun, dass $\mathcal{O}_m \hookrightarrow M$ eine Einbettung ist. Dafür suchen wir eine hinreichend kleine Umgebung W , $m \in W \subseteq M$ so dass $W \cap \psi_m(G) = W \cap \psi_m(U)$

Bemerkung:

$$h \in \text{Stab}(m) \Rightarrow \psi_m(Uh) = \psi_m(U)$$

also können wir annehmen, dass $U \cdot \text{Stab}(m) = U$. Angenommen, $\#W$ mit obigen Eigenschaften. Dann gibt es $g_k \in G$ mit:

$$g_k: m \rightarrow m, \quad g_k \in U$$

$(g_k m, m)$ ist in einer kompakten Umgebung von (m, m) enthalten, weil $g_k m \rightarrow m$ Eigentlichkeit:

$$g_k \in \underbrace{K}_{\text{kompakt}} \subseteq G$$

\Rightarrow

$$\exists g_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g_\infty \in K$$

$$\begin{array}{ccc} g_{k_n} m & \xrightarrow{\quad} & m \\ & \searrow & \parallel \\ & & g_\infty m \end{array}$$

$$\Rightarrow g_\infty \in \text{Stab}(m) \subseteq U$$

$$\nexists, \text{ da } g_{k_n} \in U \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g_\infty$$

Beweis vom Satz von Gestern:

Sei $m \in M$,

$$\psi_m: \begin{cases} G & \rightarrow M \\ g & \mapsto gm \end{cases}$$

ist glatt und surjektiv, sogar eine Immersion.

$$\rightarrow \text{lokale Einbettung, } T_1 \mathcal{O}_m(D_1 \psi_m) \cong \mathfrak{g} = T_1 G$$

Lokal an m gibt es eine Untermannigfaltigkeit $\subseteq M$, so dass $T_m M \cong \underbrace{T_m \mathcal{O}_m}_{\cong \mathfrak{g}} \oplus T_m S$, denn lokal sieht $\mathcal{O}_m \subseteq M$ wie $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ aus.

Daher $\exists v, U$ mit $m \in V \subseteq M, 1 \in U \subseteq G$, so dass

$$\varphi: \begin{cases} U \times S & \rightarrow V \\ (u, s) & \mapsto u \cdot s \end{cases}$$

mit $\varphi(g, s) = g \cdot s, g \in U, s \in S$

Behauptung:

Für V, U hinreichend klein ist φ ein Diffeomorphismus, denn φ ist lokal ein Diffeomorphismus:

$$D_{(1,m)}\varphi = \text{id}$$

φ ist aber auf ganz G definiert:

$$\hat{\varphi}: \begin{cases} G \times S & \rightarrow M \\ (g, s) & \mapsto g \cdot s \end{cases}$$

Behauptung:

Nach eventueller Verkleinerung von S ist $\hat{\varphi}: G \times S \rightarrow \hat{\varphi}(G \times S)$ ein Diffeomorphismen.

Gestern:

$\hat{\varphi}$ hat konstanten Rang $\Rightarrow \forall (g, s)$ ist es ein lokaler Diffeomorphismus. Wenn es für beliebig kleine Untermannigfaltigkeiten $m \in S' \subseteq S$ kein Diffeomorphismus wird.

- $\Rightarrow \exists m_k \in S, g_k \in G, m_k \rightarrow m, g_k m_k = m, (g_k, m_k)$ konvergiert nicht
- $\Rightarrow m_k = g_k^{-1} m, m_k \rightarrow m \Rightarrow g_k^{-1} \rightarrow m$

$(m_k, m) \in M \times M \subseteq K$ kompakt $\xrightarrow{\text{Wirkung, eigentlich}} (g_k^{-1}, m) \in L \subseteq G \times M$ kompakt

das heißt für konvergente Teilfolge

$$g_{k_n} \rightarrow g_\infty, (g_\infty, m) \in L \Rightarrow g_\infty m = m \xrightarrow{\text{Wirkung, frei}} g_{k_n} \rightarrow g_\infty = 1$$

konvergente Teilfolge, beliebig $g_k \rightarrow 1 \not\rightarrow$ zu konvergiert nicht

Da für S hinreichend klein $\hat{\varphi}: G \times S \rightarrow \varphi(G \times S)$ ein Diffeomorphismus ist, folgt

$$\Rightarrow \hat{\varphi}(G \times S) = G \cdot S \cong G \times S$$

$$\Rightarrow G \cdot S / G \cong S, \quad G \cdot S \xrightarrow{q_s} S$$

ist Immersion. Das funktioniert für jedes $m \in M$ und die glatten Strukturen sind kompatibel:

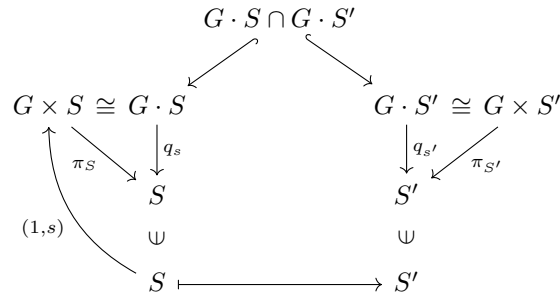
$$G \cdot S \cap G \cdot S' \neq \emptyset$$

dann ist die Vergleichsabbildung

$$q_s(\underbrace{G \cdot S'}_{\substack{\subseteq G \cdot S \\ \subseteq S}}) \rightarrow q_{s'}(G \cdot S' \cap G \cdot S)$$

$$\exists! g_s : g_s s \in G \cdot S'$$

$$\exists! g_{s'}, S' : g_s S = g_{s'} S'$$



Diese Vergleichsabbildung ist glatt als Verkettung glatter Abbildungen. $q: M \rightarrow M/G$ ist Submersion, weil dies eine lokale Eigenschaft ist.

34.24 Beispiel

G Lie-Gruppe, $H \trianglelefteq G$ Lie-Untergruppe

$$\Rightarrow H \overset{L}{\curvearrowright} G$$

$$h \mapsto (g \mapsto hg)$$

ist automatisch frei und eigentlich.

$$H \times G \rightarrow G \times G$$

$$(h, g) \mapsto (hg, g)$$

wenn $K \subseteq G \times G$ kompakt

- $\Rightarrow \pi_1(K) \subseteq G, \pi_2(K) \subseteq G$ kompakt
- $\Rightarrow K \subseteq \pi_1(K) \times \pi_2(K)$ (oBdA: $K = L \times L$ für ein kompaktes L)

$hg \in L, g \in L \Rightarrow (h, g) \in L \cdot L^{-1} \times L$

$$L \cdot L^{-1} \times L \text{ ist kompakt}$$

$$L \cdot L^{-1} := \{l \cdot l' \mid l \in L, l'^{-1} \in L\}$$

$\Rightarrow G/H$ immer Mannigfaltigkeit (G Lie-Gruppe, $H \trianglelefteq G$ Lie-Untergruppe)

34.25 Beispiel

- $\text{SO}(n+1)/\text{SO}(n) \overset{\text{Diffeomorphismus}}{\cong} S, \text{SO}(n+1) \curvearrowright S^n$ transitiv \Rightarrow nur eine Bahn

$$\text{Stab}(e_1) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{SO}(n) & \\ 0 & & & \end{array} \right] \cong \text{SO}(n)$$

– $\text{SU}(n+1)/\text{SU}(n) \cong S^{2n+1}$

$$\text{SU}(n+1) \curvearrowright \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\} \cong S^{2n+1}$$

$$- \text{GL}(n, \mathbb{R}) = G, B = \left\{ \begin{array}{ccc} * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{array} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \right\} \text{ Frage: Was ist } G/B?$$

Das heißt suche X , sodass $G \curvearrowright X$ transitiv, $B = \text{Stab}(x_0)$, $b \in B \Leftrightarrow \text{span}(e_1) \subseteq \text{span}(e_1, e_2) \subseteq \dots \subseteq \text{span}(e_1, \dots, e_{n-1})$ sind invariante Unterräume.

34.26 Definition

Sei V ein Vektorraum. Eine *Flagge* F in V ist eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_k = V$$

k heißt *Länge* der Flagge. Eine *volle Flagge* ist eine Flagge mit Länge $\dim V$.

$$G/B = \{ \text{alle vollen Flaggen in } \mathbb{R}^n \}$$

$$G \curvearrowright \{ \text{volle Flaggen} \} \text{ klar}$$

transitiv:

Zu jeder vollen Flagge \mathcal{F} existiert eine Basis v_1, \dots, v_n mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (0 \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle \subsetneq V) \\ B &= \text{Stab}(0 \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \subsetneq \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

34.27 Frage

Wie kann man (Ko-)Vektorfelder ableiten?

34.28 Beobachtung

Wir wissen, wie man Funktionen ableitet:

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^\infty(M), \quad X \in \Gamma TM \\ \Rightarrow X(\varphi) &\in C^\infty(M) \quad \text{oder an einem Punkt } m \in M : X_m(\varphi) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

34.29 Beobachtung

Man kann aber erst mal keinen Sinn aus $X(Y) \in \Gamma(TM)$ bilden. ($X, Y \in \Gamma(TM)$)

$$\begin{aligned} X_m(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(m + \varepsilon \xi) - \varphi(m)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\phi_\varepsilon^X(m)) - \varphi(m)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

wenn $M = \mathbb{R}^n$, $X_m \in T_m \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \ni \xi$. Also auf jeder Mannigfaltigkeit stimmt:

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi \circ \phi_\varepsilon^X - \varphi}{\varepsilon} \\ &\stackrel{\text{punktweise}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\phi_\varepsilon^X)(\varphi) - \varphi}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Wenn dies für Vektorfelder versuchen:

$$[X(Y)]_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\phi_\varepsilon)_*(Y_m) - Y_m}{\varepsilon}$$

”

Problem:

$$Y_m \in T_m M, (\phi_\varepsilon)_* Y_m \in \underbrace{T_{\psi_\varepsilon(m)} M}_{\ni Y_{\phi_\varepsilon(m)}} \rightsquigarrow \text{macht keinen Sinn.}$$

Korrektur, die Sinn ergibt:

34.30 Definition

Sei M Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \Gamma TM$. Die *Lie-Ableitung* von Y nach X ist definiert als:

$$(\mathcal{L}_X Y)_m := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-\varepsilon})_* Y_{\phi_\varepsilon(m)} - Y_m}{\varepsilon} \in T_m M \Rightarrow \mathcal{L}_X Y \in \Gamma(TM)$$

Analog:

Wenn $X \in \Gamma(TM)$ Vektorfeld, $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ Ko-Vektorfeld. $\Rightarrow (\mathcal{L}_X \alpha)_m := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_\varepsilon^*(\alpha_{\phi_\varepsilon(m)}) - \alpha(m)}{\varepsilon}$

$$\underbrace{\phi_\varepsilon^*}_{=:(\phi_\varepsilon)_*}: T_{\phi_\varepsilon(m)}^* M \longrightarrow T_m^* M$$

34.31 Satz

$$X \in \Gamma(TM), Y \in \Gamma TM \Rightarrow \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Beweis:

Wir müssen zeigen: $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\frac{((\phi_{-\varepsilon})_* Y_{\phi_\varepsilon(m)})(\varphi) - Y_m(\varphi)}{\varepsilon}}_{=:(*)} = [X, Y]_m(\varphi)$$

$$(\phi_{-\varepsilon})_* Y_{\phi_\varepsilon(m)} = Y_{\phi_\varepsilon(m)}(\phi_{-\varepsilon}^*(\varphi)) = Y_{\phi_\varepsilon(m)}(\varphi \circ \phi_{-\varepsilon}^*)$$

Sei U Umgebung von m , $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $\phi: I \times U \rightarrow M$ existiert. Sei $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f = \varphi \circ \phi - \varphi$, $(t, u) \mapsto \varphi(\phi(t, u)) - \varphi(u)$

$$\Rightarrow f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(0, p) =: g(p), p \in U$$

Betrachte:

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(t, p) &:= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(st, p) ds; \quad \hat{g}(0, p) = g(p) \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(st, p) d(\tau s) \\
 &= \frac{1}{\tau} (f(\tau, p) - f(0, p)) \\
 &= \frac{1}{\tau} f(\tau, p), \quad \tau \neq 0
 \end{aligned}$$

- $\Rightarrow f(t, p) = t \cdot \hat{g}(t, p), \hat{g}(0, p) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, p)$
- $Y_{\phi_\varepsilon(m)}(\varphi \circ \phi_{-\varepsilon}) = Y_{\phi_\varepsilon(m)}(f(-\varepsilon, \cdot) + \varphi) = Y_{\phi_\varepsilon(m)}(-\varepsilon \cdot \hat{g}(-\varepsilon, \cdot) + \varphi)$
- \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 (*) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon Y_{\phi_\varepsilon(m)}(\hat{g}(-\varepsilon, \cdot)) + Y_{\phi_\varepsilon(m)}(\varphi) - Y_m(\varphi)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi_\varepsilon(m)}(\varphi) - Y_m(\varphi)}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_{\phi_\varepsilon(m)}(\hat{g}(-\varepsilon, \cdot)) \\
 &= X(Y(\varphi))(m) - Y(g)(m) = X(Y(\varphi))(m) - Y(X(\varphi))(m)
 \end{aligned}$$

34.32 Proposition

Wenn $X, Y \in \Gamma(TM)$, $(\phi_t), (\psi_s)$ die Flüsse von X bzw Y , dann kommutieren X, Y genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren:

$$[X, Y] = 0 \in \Gamma(TM) \Leftrightarrow \phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t \quad \forall s, t \text{ wo es Sinn ergibt}$$

Vorbereitung:

Sei $f: M \rightarrow M$ ein (lokaler Diffeomorphismen) $f \circ \phi_t \circ f^{-1}$ gehört zum Vektorfeld $f_* \circ X \circ f^{-1}$.

Wenn $f \circ \phi_t \circ f^{-1} = \phi_t \Rightarrow f_* \circ X \circ f^{-1} = X$

Beweis:

- „ \Leftarrow “: setze $f = \psi_s \Rightarrow (\psi_s)_* \circ X \circ \psi_{-s} = X$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (\psi_s)_*(X_{\psi_{-s}(m)}) = X_m \\
 &\Rightarrow \frac{(\psi_s)_*(X_{\psi_{-s}(m)}) - X_m}{s} = 0 \\
 &\Rightarrow \mathcal{L}_Y X = [X, Y] = 0
 \end{aligned}$$

- „ \Rightarrow “: $[X, Y] = 0$. Wir wissen:

$$\gamma: \begin{cases} I & \rightarrow T_m M \\ s & \mapsto (\psi_s)_*(x_{\psi_{-s}(m)}) \end{cases}$$

erfüllt $\dot{\gamma}(0) = 0$ (Im Sinne des Differenzenquotienten). Wir wollen zeigen:
 $\gamma(s) = \text{const} = X_m$. Sei s beliebig, $q := \psi_s(m)$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(s+h) - \gamma(s)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\psi_{s+h})_* X_{\psi_{-(s+h)}(m)} - (\psi_s)_*(X_{\psi_{-s}(m)})}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\psi_{s+h})_* \circ X \circ \psi_{-(s+h)} - (\psi_s)_* \circ X \circ \psi_{-s}}{h}(m) \\
 &= ((\psi_s)_* \circ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\psi_h)_* \circ X \circ \psi_h - X}{h} \circ \psi_{-s})(m) \\
 &= ((\psi_s)_* \circ [Y, X] \circ \psi_{-s})(m) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \forall m \in M : \gamma(s) &= \gamma(0) = X_m \\
 \Rightarrow (\psi_s)_* \circ X \circ \psi_{-s} &= X \\
 \Rightarrow \psi_s \circ \phi_t \circ \psi_{-s} &= \psi_t
 \end{aligned}$$

Kommutatorformel, erstmal ohne Beweis:

$$[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\psi_{-\sqrt{t}} \circ \phi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \phi_{\sqrt{t}})$$

Wurzel, da 2. Ordnung

TODO Bildchen 37

$$\phi: W \subseteq \mathbb{R} \times M \rightarrow M \quad \text{Fluss}$$

TODO Bildchen 38

34.33 Beispiel

$$\begin{aligned}
 M = \mathbb{R}^n, X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \\
 \Rightarrow [X_i, X_j] &= 0, \quad \text{linear unabhängig}
 \end{aligned}$$

34.34 Proposition

Sei M Mannigfaltigkeit, $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ mit $[X_i, Y_i] = 0 \forall i, j = 1, \dots, k$.
 Wenn $p \in M$, st. $X_1(p), \dots, X_k(p)$ linear unabhängig.

$\Rightarrow \exists (U, y)$ Karte um p :

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i = 1, \dots, k$$

34.35 Korollar

$X \in \Gamma(TM)$, $X(p) \neq 0 \Rightarrow \exists(U, x)$ wie oben mit $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$ -Geradebiegen eines Vektorfeldes.

TODO Bildchen 39

Beweis Proposition:

oBdA ist $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten jetzt auf einer hinreichend kleinen Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$f: W \rightarrow \mathbb{R}^n = M, \quad a_1, \dots, a_n \mapsto (\phi_{a_1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{a_k}^{X_k})(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} & \left(f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Big|_{\in T_a \mathbb{R}^n} \right)_a (\varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a (f^* \varphi) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\varphi \circ f)(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - (\varphi \circ f)(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\varphi \circ \phi_{a_1+h}^{X_1} = \phi_h^{X_1} \circ \phi_{a_1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{a_k}^{X_k})(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n) - (\varphi \circ f)(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\varphi \circ \phi_n^{X_1} \circ f)(a_1, \dots, a_n) - (\varphi \circ f)(a_1, \dots, a_n)) \\ &= X_1(\varphi)(f(a_1, \dots, a_n)) \end{aligned}$$

- $f_* \frac{\partial}{\partial x_1} = X_1 \circ f$. Da die Flüsse kommutieren, können wir den Beweis für X_i anstelle von X_1 wiederholen.
- $f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = X_i \circ f \forall i = 1, \dots, k$ Außerdem für $i > k$:

$$f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Wenn also $X_i(0) \in \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$, $i = 1, \dots, k$ was man durch Koordinatenwahl erreichen kann, so ist $D_0 f$ invertierbar, also f lokal ein Diffeomorphismus, $f^{-1} =: y$ ist die gewünschte Karte.

Integralkurven gibt es immer.

Seien $X_1, \dots, X_k \in \Gamma TM$ Vektorfelder, so dass

$$\forall p \in M : X_1(p), \dots, X_k(p) \quad \text{linear unabhängig}$$

$\Rightarrow \exists?$ Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M : T_p N = \text{span} X_1(p), \dots, X_k(p)?$

Beobachtung

1. Wenn N existiert, so gilt: $[X_i, x_j](p) \in \text{span}(x_1(p), \dots, x_k(p)) = T_p M$

2. Im Allgemeinen kann man nur hoffen, dass M immersiert ist (nicht eingebettet)
3. Was wichtig ist, ist $\text{span}(X_1(p), \dots, X_k(p))$ und nicht die Vektorfelder selbst.

34.36 Definition

Sei M Mannigfaltigkeit. Eine *Distribution* Δ auf M von Dimension k ist die Zuordnung $p \mapsto \Delta_p \subseteq T_p M$ (Δ_p Untervektorraum von Dimension k) glatt im folgenden Sinne ist:

$$\begin{aligned} \forall p \in M : \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } p, \text{ Vektorfeld } X \in \Gamma(TU)_p : \\ \Delta_p = \text{span}(X_1(p), \dots, X_k(p)) \end{aligned}$$

34.37 Definition

Eine Distribution Δ heißt *integrierbar*, wenn für X_i 's aus der Definition von Δ gilt:

$$\forall p \in M : \forall i, j : [X_i, X_j]_p \in \Delta_p$$

34.38 Definition

Eine immersierte Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ heißt *Integralmannigfaltigkeit* von Δ , wenn

$$T_p N = \Delta_p, \quad p \in N$$

34.39 Satz: Frobenius

Wenn Δ eine integrierbare Distribution ist, so existiert $\forall p \in M$ eine eindeutig bestimmte maximale Integralmannigfaltigkeit von Δ durch p .

Beweis:

Wenn $[X_i, X_j] = 0 \Rightarrow$ alles gut! \Rightarrow):

$$\forall i = 1, \dots, k : X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Wir führen jetzt den allgemeinen Fall auf diesen zurück:

Sei $p \in M$, Y_1, \dots, Y_k definierendes Vektorfeld für Δ an p , das heißt:

$$\Delta_p = \text{span}(Y_1(p), \dots, Y_k(p))$$

Wir können in U (U Umgebung von p) Koordinaten x^1, \dots, x^n so wählen, dass

$$Y_i(p) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Sei $\pi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $q \mapsto (x^1(q), \dots, x^k(q)) \Rightarrow$

$$\pi_*: TU \rightarrow T\mathbb{R}^k: \pi_* \left(\sum_{i=1}^n \nu^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q \right) = \sum_{i=1}^k \nu^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(q)} \quad (\nu_i \in \mathbb{R})$$

$\pi_*|_{T_p U \cong T_p M}: T_p M \rightarrow T_{\pi(p)} \mathbb{R}^k$ wird zu einem Isomorphismus, wenn eingeschränkt auf Δ_p

$$\pi_*|_{\Delta_p}: \Delta_p \rightarrow T_{\pi(p)} \mathbb{R}^k, \quad Y_i(p) \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Aus Stetigkeitsgründen ist $\pi_*|_{\Delta_q}: \Delta_q \rightarrow T_{\pi(q)} \mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus für $q \in W$, W Umgebung von p .

Definiere Vektorfelder $X_i(q) = (\pi_*|_{\Delta_q})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(q)} \right) \in \Delta_q \forall i = 1, \dots, k$.

Die Vektorfelder X_i spannen Δ_q für $q \in W$ auf. Behauptung $[X_i, X_j] = 0$.

$$\pi_* \left(\underbrace{[X_i, X_j]}_{\in \Delta_q \text{ (Integrabilität)}} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_{\pi(q)} = 0$$

$$\pi_*|_{\Delta_q} \text{ inj.} \Rightarrow [X_i, X_j] = 0$$

Maximal: Wie bei Picard-Lindelöf

Wenn X, Y zwei Vektorfelder auf M , $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}, (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die entsprechenden Flüsse, $p \in M$, dann gilt:

$$2[X, Y]_p = \dot{\gamma}(0)$$

wobei $\gamma(t) = (\psi_{-t} \circ \phi_{-t} \circ \psi_t \circ \phi_t)(p)$ (vgl 19.12 ganz unten) TODO Bildchen 40

Beweis:

Wir können annehmen, dass $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Ziel ϕ_t, ψ_s taylorieren und einsetzen. Wir betrachten also:

$$\begin{aligned} h(s, t) &= (\psi_{-s} \circ \phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t)(0) \\ &= \psi_{-s}(\phi_{-t}(\psi_s(\phi_t(0)))) \\ \phi_t(0) &= t \underbrace{X_0}_{X(0)} + \frac{t^2}{2} X_0(X) + o(t^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = X(\phi_t(0))$$

$$\frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \underbrace{X_0}_{\in T_0 \mathbb{R}^n} \left(\underbrace{X}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \right)$$

$$X(v) = \sum_{i=1}^n X_i(v) \frac{\partial}{\partial v_i}$$

$$(X_0(X))_k = \sum_{i=1}^n X_i(0) \frac{\partial X_k}{\partial v_i} \Big|_{v=0}$$

$$\begin{aligned}
\psi_s(\phi_t(0)) &= \psi_s(tX_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + o(t^2)) \\
&= tX_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + o(t^2) + sY_{tX_0+o(t)} + \frac{s^2}{2}Y_{o(1)(Y)} + o(s^2 + t^2) \\
&= tX_0 + sY_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
\phi_{-t}(\psi_s(\phi_t(0))) &= \phi_{-t}(tX_0 + sY_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) + o(s^2 + t^2)) \\
&= tX_0 + sY_0 + \frac{t^2}{2}X_0(X) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
&\quad - tX_{tX_0+sY_0+o(\sqrt{s^2+t^2})} + \frac{t^2}{2}X_{o(1)(X)} + o(s^2 + t^2) \\
&= \cancel{tX_0} + sY_0 + \cancel{\frac{t^2}{2}X_0(X)} + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + stX_0(Y) - \cancel{tX_0} \\
&\quad - t(\cancel{tX_0} + sY_0)(X) + o(s^2 + t^2) + \cancel{\frac{t^2}{2}X_0(X)} \\
&= sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X)) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
\psi_{-s}(\phi_{-t}(\psi_s(\phi_t(0)))) &= \psi_{-s}(sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X)) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + o(s^2 + t^2)) \\
&= sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X)) + \frac{s^2}{2}Y_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
&\quad - sY_{sY_0+o(\sqrt{s^2+t^2})} + \frac{s^2}{2}Y_{o(1)(Y)} \\
&= sY_0 + st(X_0(Y) - Y_0(X)) + s^2Y_0(Y) - sY_0 - s \cdot sY_0(Y) + o(s^2 + t^2) \\
&= st(X_0(Y) - Y_0(X)) + o(s^2 + t^2) = st[X, Y]_0 + o(s^2 + t^2)
\end{aligned}$$

35 (12) Lineare Algebra: Tensorprodukte und äußere Potenzen

35.1 Motivation

Seien X, Y Mengen, \mathbb{K} Körper ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

$$C_\infty(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \mid |\text{supp } f| < \infty\}$$

Frage:

$$C_\infty(X \times Y) \stackrel{?}{=} \{f: x \times Y \rightarrow \mathbb{K} \mid \underbrace{\text{supp } f}_{(x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y), \varphi \in C_\infty(X), \psi \in C_\infty(Y)} \mid < \infty\}$$

Antwort:

$$C_\infty(X \times Y) \cong C_\infty(X) \otimes C_\infty(Y)$$

TODO Bildchen 41

In der linearen Algebra studiert man auch bilineare Abbildungen, zum Beispiel:

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

Tensorprodukte ist das, was aus bilinearen (multilinearen) Abbildungen lineare macht.

35.2 Definition

Seien V, W zwei Vektorräume. Ein Vektorraum T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\beta: V \times W \rightarrow T$ heißt *Tensorprodukt* von V und W , wenn T folgende *universelle Eigenschaft* besitzt:

Für jeden Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $\varphi: V \times W \rightarrow Z$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{\varphi}: T \rightarrow Z$ mit $\bar{\varphi} \circ \beta = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta} & T \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \bar{\varphi} \\ & & Z \end{array}$$

(Z ist ein Mächtgern-Tensorprodukt)

35.3 Lemma

Das Tensorprodukt von V und W ist bis auf Isomorphie eindeutig: (wenn es existiert)

Wenn

$$V \times W \xrightarrow{\beta} T \qquad V \times W \xrightarrow{\beta'} T'$$

zwei Tensorprodukte (von V und W) sind, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\theta: T \xrightarrow{\cong} T'$ mit $\theta \circ \beta = \beta'$

Beweis:

Universelle Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta} & T \\ & \searrow \beta' & \downarrow \exists! \theta \\ & & T' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta'} & T' \\ & \searrow \beta & \downarrow \exists! \theta' \\ & & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta} & T \\ & \searrow \beta & \downarrow \exists! \text{id}_T = \theta' \circ \theta \\ & & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta'} & T' \\ & \searrow \beta' & \downarrow \exists! \text{id}_{T'} = \theta \circ \theta' \\ & & T' \end{array}$$

35.4 Bezeichnung

$$T =: V \times W \quad \text{wenn es existiert}$$

(streng genommen muss man β angeben!)

35.5 Proposition

$V \otimes W$ existiert für jedes Paar V, W .

35.6 Definition

Eine *Basis* von V ist eine Menge S zusammen mit $i: S \rightarrow V$ sodass $\forall Z, \forall \varphi: S \rightarrow Z$ (Mengenabbildung) $\exists!$ lineares $\bar{\varphi}: V \rightarrow Z$ mit $\bar{\varphi} \circ i = \varphi$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & V \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \bar{\varphi} \\ & & Z \end{array}$$

35.7 Bemerkung

Ein Vektorraum V mit Basis S ist somit (nach dem Lemma) eindeutig bis auf Isomorphie definiert.

35.7.1 Notation

$$\begin{aligned} V &=: \mathcal{F}(S) \text{ freier Vektorraum auf } S \\ &\cong \bigoplus_{s \in S} \mathbb{K} \end{aligned}$$

35.7.2 Beweis der Proposition

$$\begin{aligned} V \otimes W &:= \mathcal{F}(V \times W) / \left\langle \begin{array}{l} \lambda(v,w) - (\lambda v, w), \lambda(v,w) - (v, \lambda w) \\ (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2), \\ v, v_1, v_2 \in V, \\ w, w_1, w_2 \in W, \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\rangle \\ \beta &: \begin{cases} V \times W & \rightarrow V \otimes W \\ (v, w) & \mapsto [(v, w)] =: v \otimes w \end{cases} \end{aligned}$$

Das heißt $V \otimes W$ ist aufgespannt durch Elemente $v \otimes w, v \in V, w \in W$. Die folgenden Rechenregeln erfüllen [= „ \otimes “ ist linear auf beiden Seiten]

$$\begin{aligned} \lambda(v \otimes w) &= \lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w \\ (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \end{aligned}$$

Die universelle Eigenschaft ist erfüllt, denn:

Sei Z ein Vektorraum, $\varphi: V \times W \rightarrow Z$ linear. Definiere $\bar{\varphi}(v \otimes w) := \varphi(v, w)$ linear fortgesetzt. $\Rightarrow \bar{\varphi} \circ \beta = \varphi$ nach Konstruktion $\bar{\varphi}$ ist wohldefiniert, weil φ bilinear war. Zum Beispiel

$$\bar{\varphi}(\lambda(v \otimes w) - (\lambda v \otimes w)) = \lambda\varphi(v, w) - \varphi(\lambda v, w) = 0$$

entsprechend für andere Relationen. Wenn jetzt $\bar{\psi}: V \otimes W \rightarrow Z$ mit

$$\bar{\psi} \circ \beta = \varphi \Rightarrow \bar{\psi}(v \otimes w) = \varphi(v, w) = \bar{\varphi}(v \otimes w)$$

$v \otimes w$ spannen $(V \otimes W)$ auf $\Rightarrow \bar{\psi} = \bar{\varphi}$

Definition 35.1.

1. $V \xrightarrow{f} Z, W \xrightarrow{g} U$ linear $\Rightarrow \exists! f \otimes g: V \otimes W \rightarrow Z \otimes U$ mit $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$, denn $(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$ ist bilinear.
2. $\alpha \in V^*, \beta \in W^* \Rightarrow \exists! \alpha \otimes \beta: V \otimes W \rightarrow \mathbb{K}, (\alpha \otimes \beta)(v \otimes w) = \alpha(v)\beta(w)$
[Keine Notationskollision, weil $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}, \lambda \otimes \mu \mapsto \lambda\mu$]

Proposition 35.2. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig, $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig. Dann sind $v_1 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_n$ linear unabhängig in $V \otimes W$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \otimes w_i = 0$$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ mit $\alpha_j(v_i) = \delta_{ij}$. Für $\beta \in W^*$ beliebig gilt dann

$$\begin{aligned} (\alpha_j \otimes \beta) \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \otimes w_i}_{=0} \right) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_j(v_i) \otimes \beta(w_i) = \lambda_j \\ &= \lambda_j \beta(w_j) \end{aligned}$$

Wenn $w_j \neq 0 \Rightarrow \exists \beta: \beta(w_j) \neq 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$

Korollar 35.3. Wenn $B = (b_i)_{i \in I}, C = (c_j)_{j \in J}$ Basen in V bzw. W sind, dann ist $(b_i \otimes c_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis in $V \otimes W$

Korollar 35.4. $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$

Korollar 35.5. Wenn $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis in $V, x \in V \otimes W \Rightarrow \exists! (w_i)_{i \in I}, w_i \in W$ mit $x = \sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i$

Ab hier seien V, W, Z, \dots endlich dimensional.

Proposition 35.6. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned} W \otimes V^* &\longrightarrow \text{Hom}(V, W) \\ w \otimes \alpha &\longmapsto (v \mapsto \alpha(v)w) \end{aligned}$$

Beweis:

Dimensionen sind gleich, also reicht es zu zeigen, dass die Abbildung surjektiv ist:

$$\sum_i f(e_i) \otimes e_i^* \leftarrow f \in \text{Hom}(V, W)$$

((e_i^*) ist die Dualbasis zu $(e_i): e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$)

$$\sum_i f(e_i) \otimes e_i^* \mapsto (e_j \mapsto \sum_i e_i^*(e_j) f(e_i) = f(e_j))$$

Korollar 35.7. $K \otimes V \cong K \otimes V^{**} \cong \text{Hom}(V^*, \mathbb{K}) = V^{**} \cong V$

Definition 35.8. Sei V ein Vektorraum. Ein *Tensor vom Typ* (r, s) (über V) ist ein Element von

$$\begin{aligned} T_{r,s}(V) &= V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^* \\ &= V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} \quad r, s \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Bemerkung 35.9. Eine Basis $(e_i)_{i \in I}$ in V induziert eine Basis

$$:= (e_i \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_s}^*)_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in I} \quad \text{in } T_{r,s}(V)$$

Indexnotation $T \in T_{r,s}(V)$.

$$\Rightarrow T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

Beispiel 35.10. $T_{1,0}(V) = V$, $T_{0,1} = V^*$, $T_{1,1}(V) = V \otimes V^* \cong \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$

Bemerkung 35.11. $(e_i)_{i=1}^n$ Basis in $V \rightsquigarrow (e_i^*)_{i=1}^n$ Dualbasis in V^* . $(e_i \otimes e_j^*)$ Basis in $V \otimes V^* \cong \text{End}(V) \rightarrow f$

$$f = \sum \underbrace{f_{ij}}_{\text{Matrix von } f \text{ bezüglich } (e_i)} e_i \otimes e_j^*$$

Frage 35.12. Was ist $T_{r,s}(V)^*$?

Erwartung $T_{r,s}(V)^* \cong T_{r,s}(V^*)$

Definition 35.13.

$$M_{s,r}(V) := \{f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \mid f \text{ multilinear}\}$$

Proposition 35.14. *Es gibt natürliche Isomorphismen*

$$T_{r,s}(V) \cong T_{s,r}(V^*) \cong (T_{r,s}(V^*))^* \cong M_{r,s}(V^*) \cong M_{s,r}$$

35.8 Vorbereitung

1. $V \otimes W \cong W \otimes V$, $v \otimes w \mapsto w \otimes v$
2. Definiere:

Definition 35.15. Seien U, Z Vektorräume. Eine Paarung zwischen U und Z ist eine bilineare Abbildung $\alpha: U \times Z \rightarrow \mathbb{K}$. α ist *nicht ausgeartet* = *nicht-singulär*, wenn

- $\forall z \in Z \alpha(u, z) = 0 \Rightarrow u = 0$
- $\forall u \in U \alpha(u, z) = 0 \Rightarrow z = 0$

Beispiel 35.16. Die kanonische Paarung $(\cdot, \cdot): V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$ ist nicht ausgeartet.

Lemma 35.17. *Ist α eine nicht-ausgeartete Paarung. Betrachte Abbildungen:*

$$b_u : \begin{cases} U & \rightarrow Z^* \\ u & \mapsto (z \mapsto (\alpha(u, z))) \end{cases}$$

$$b_z : \begin{cases} Z & \rightarrow U^* \\ z & \mapsto (u \mapsto (\alpha(u, z))) \end{cases}$$

b_u, b_z heißen *musikalische Isomorphismen zur Paarung α* . Die Inversen heißen

$$\sharp_u := b_u^{-1}, \quad \sharp_z := b_z^{-1}$$

Beweis: Nicht-Singularität von α bedeutet, dass b_u, b_z injektiv sind. $\Leftrightarrow \dim U \leq \dim(Z)$, $\dim Z \leq \dim U \Rightarrow$ Dimensionen gleich, endlich $\Rightarrow b$'s auch surjektiv.

Beweis der Proposition:

Wegen der kanonischen Isomorphie von $V \cong V^{**}$ ist bei (1) nichts zu zeigen:

$$T_{r,s}(V) \xrightarrow{(1)} T_{s,r}(V^*) \cong (T_{r,s}(V^*))^* \xrightarrow{(2)} M_{r,s}(V^*) \xrightarrow{(1)} M_{s,r}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\xrightarrow{(3)}$

Für (2) beachte man

$$M_{s,r}(V) := \{f: \underbrace{V \times \dots \times V}_s \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_k \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ multilinear}\}$$

Für (3) konstruieren wir eine nicht ausgeartete Paarung α zwischen $T_{r,s}(V)$ und $T_{r,s}(V^*)$: Für

$$u = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_s^*$$

$$w = z_1 \otimes \dots \otimes z_r \otimes z_1^* \otimes \dots \otimes z_s^*$$

$v_i, z_i \in V, v_j^*, z_j^* \in V^*$

$$\alpha(u, w) := \prod_{i=1}^r z_i^*(v_i) \prod_{j=1}^s v_j^*(z_j) \in \mathbb{K}$$

α ist nichtsingulär, weil diese Paarung ausgedrückt in Basen

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_s}^*$$

$$e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_r}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}$$

die Matrix $\mathbb{1}_{(\dim V)^{r+s}}$

Bemerkung 35.18. V euklidisch, $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtausgeartete Paarung

$$b : \begin{matrix} (1,0) & (0,1)^* \\ V & \rightarrow V \end{matrix}$$

$$\sharp : \begin{matrix} (0,1) & (1,0) \\ V^* & \rightarrow V \end{matrix}$$

Bemerkung 35.19. $M_{2,0}(V) = T_{2,0}(V^*) \cong V^* \otimes V^* \ni \alpha \otimes \beta, (\alpha \otimes \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w)$

In $M_{2,0}(V)$ gibt es den Unterraum der symmetrischen Bilinearformen

$$\text{Sym}_{2,0}(V) = \{f: V \times V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ symmetrische Bilinearform}\}$$

Dies entspricht in $V^* \otimes V^*$ dem Unterraum

$$(V^* \otimes V^*)^\sigma := \{b \in V^* \otimes V^* \mid \sigma(b) = b\}$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma: V^* \otimes V^* &\rightarrow V^* \otimes V^* && \text{linear fortgesetzt} \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \beta \otimes \alpha \end{aligned}$$

Bemerkung 35.20. $\{\alpha: V \times V \rightarrow K \mid \alpha \text{ symmetrisch}\} =: \text{Sym}_{2,0}(V) \leq M_{2,0}(V)$

$$\{b \in V^* \otimes V^* \mid \sigma(b) = b\} =: (V^* \otimes V^*)^\sigma \leq V^* \otimes V^*$$

wobei

$$\sigma: \begin{cases} V^* \otimes V^* &\rightarrow V^* \otimes V^* \\ \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i &\mapsto \sum_i \beta_i \otimes \alpha_i \end{cases}$$

36 Äußere Algebra

Idee 36.1. Koordinatenfreie Determinante

Definition 36.2. Sei V ein K -Vektorraum. Die Tensoralgebra ist definiert als:

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}, \quad V^{\otimes 0} := K$$

mit Multiplikation \otimes

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \otimes (w_1 \otimes \dots \otimes w_m) := v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m \in V^{\otimes(n+m)}$$

Definition 36.3.

$$\begin{aligned} V &= \text{Lin}(\{e_1, \dots, e_n\}) \Rightarrow T(V) \cong K\langle e_1, \dots, e_n \rangle \quad \text{freie Algebra} \\ I(V) &:= (v \otimes v \mid v \in V) \trianglelefteq T(V), \quad \bigwedge V := T(V)/I(V) \quad \text{äußere Algebra} \end{aligned}$$

Notation 36.4. $v_1 \wedge \dots \wedge v_k := [v_1 \otimes \dots \otimes v_k]_{I(V)} \in \bigwedge V$

Per Definition: $v \wedge v = 0 \in \bigwedge V, \quad \forall v \in V.$

$$\Rightarrow 0 = (v+w) \wedge (v+w) = \underbrace{v \wedge v}_{=0} + v \wedge w + w \wedge v + \underbrace{w \wedge w}_{=0} = v \wedge w + w \wedge v \Rightarrow v \wedge w = -w \wedge v$$

$$\begin{aligned}
\bigwedge^k V &:= [V^{\otimes k}]_{I(V)} \subseteq \bigwedge V \\
&= V^{\otimes k} / (V^{\otimes k} \cap I(V)), \quad V^{\otimes k} \cap I(V) =: I_k(V) \\
\bigwedge^0 V &= K / (K \cap I(V)) = K / \{0\} = K \\
\bigwedge^1 V &= V / (V \cap I(V)) = V / \{0\} = V \\
\bigwedge^k &= \{0\}, \quad \text{falls } k > n := \dim V
\end{aligned}$$

da $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_n = 0$ (ein Index immer doppelt)

Proposition 36.5. $(e_i)_{i=1, \dots, n} \subsetneq V$ Basis, $\dim \left(\bigwedge^k V \right) = \binom{n}{k}$, $(0 \leq k \leq n)$
mit Basis $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k \in \{1, \dots, n\}\}$:

$$\dim \left(\bigwedge V \right) = 2^n$$

Beweis:

$$\text{Lin}(\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k \in \{1, \dots, n\}\}) = \bigwedge^k V \quad \text{klar.}$$

Lineare Unabhängig:

$$\sum \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$$

$$\forall (i_1, \dots, i_k) \exists (j_1, \dots, j_{n-k}) : \{i_1, \dots, i_k\} \dot{\cup} \{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$$

$$(j_1 < \dots < j_{n-k})$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\sum \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \right) \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-k}} \\
&= \pm \lambda_{i_1 \dots i_k} e_1 \wedge \dots \wedge e_n
\end{aligned}$$

(fast alle Summanden fallen weg, da Vektor doppelt) Zu zeigen: $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0$

Trick: Suche $\omega: \bigwedge^n V \rightarrow K$, $\omega(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \neq 0$

○
○
○

Bemerkung 36.6. Sei $f: V \rightarrow V$ linear $\Rightarrow \bigwedge^n f: \begin{cases} \bigwedge^n V & \rightarrow \bigwedge^n V \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_n & \rightarrow f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_n) \end{cases}$

$$\dim \left(\bigwedge^n V \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \bigwedge^n f: \begin{cases} \bigwedge^n V \rightarrow \bigwedge^n V \\ x \mapsto \alpha \cdot x \end{cases} \quad \text{mit } \alpha = \det(f)$$

$$\bigwedge^n (g \circ f) = \bigwedge^n g \circ \bigwedge^n f \Rightarrow \det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$$

$$f \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det(f) \in K^\times$$

Proposition 36.7.

$$(1) \cong (2) \cong (3) :\Leftrightarrow$$

$$\left(\bigwedge^k V\right)^* \cong \bigwedge^k V^* \cong \{f: V^{\otimes k} \rightarrow K \text{ multilinear, alternierend}\}$$

Beweis: (1) \cong (3) per Definition: (1) \cong (2): Sei

$$(\cdot, \cdot): \begin{cases} \bigwedge^k(V^*) \times \bigwedge^k(V) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*, v_1 \wedge \dots \wedge v_k) & \mapsto \det(v_i^*(v_j))_{i,j=1,\dots,k} \end{cases}$$

In Basen

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} \subseteq \bigwedge^k(V^*)$$

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} \subseteq \bigwedge^k(V)$$

liefert Einheitsmatrix $E_{\binom{n}{k}}$:

$$\begin{aligned} ((e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*), (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k})) &= \det(e_{i_e}^*(e_{j_m}))_{l,m=1,\dots,k} \\ &= \det(\delta_{i_e j_m})_{l,m=1,\dots,k} \\ &= \det \begin{cases} 1, & \text{falls } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \delta_{(i_1, \dots, i_k)(j_1, \dots, j_k)} \end{aligned}$$

Definition 36.8. $\dim V = n \Rightarrow \bigwedge^n(V^*)$ ist Raum der *Determinantenform* $w \in \bigwedge^n(V^*) \setminus \{0\}$ heißt *Volumenform* auf V

letztes Mal:

$$\begin{aligned} \bigwedge V &= T(V)/\langle v \otimes v \mid v \in V \rangle \\ \bigwedge V &= \bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \bigwedge^k V \\ \dim \bigwedge^k V &= \binom{n}{k} \\ n &= \dim V \end{aligned}$$

e_1, \dots, e_n Basis in $V \Rightarrow \{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ eine Basis in $\bigwedge^k V$.

Beispiel 36.9.

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 &= \text{span}(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4) \\ \bigwedge^k V^* &\cong \left(\bigwedge^k V\right)^* \\ &\cong \{\text{alternierende multilineare Abbildung, } f: V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}\} \\ (w_1^* \wedge w_2^*)(v_1, v_2) &= \det \begin{pmatrix} w_1^*(v_1) & w_1^*(v_2) \\ w_2^*(v_1) & w_2^*(v_2) \end{pmatrix}, \quad w_i^* \in V^*, v_i \in V \end{aligned}$$

Frage 36.10.

$$\alpha \in \bigwedge^k V^*, \beta \in \bigwedge^l V^* \Rightarrow (-1)^{k \cdot l} \cdot \beta \wedge \alpha = \alpha \wedge \beta \in \bigwedge^{k+l} V^*$$

Was ist $\alpha \wedge \beta$ als alternierende Abbildung in Termen von α und β ?

Proposition 36.11.

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \text{Sym}(k+l)} \text{sgn}(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Shuff}(k,l)} \text{sgn}(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

wobei

$$\text{Shuff}(k, l) = \{ \sigma \in \text{Sym}(k+l) \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l) \}$$

Beweis:

Reicht, den Fall $\alpha = u_1^* \wedge \dots \wedge u_k^*$, $\beta = w_1^* \wedge \dots \wedge w_l^*$

$$\begin{aligned} &\alpha(v_1, \dots, v_k) \\ &= \det(u_i^*(v_j))_{ij} \\ &\stackrel{\text{Leibnitzregel}}{=} \sum_{\tau \in \text{Sym}(k)} \text{sgn}(\tau) u_1^*(v_{\tau(1)}) \cdot \dots \cdot u_k^*(v_{\tau(k)}) \end{aligned}$$

$$\sigma \in \text{Sym}(k+l) : \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \sum_{\tau \in \text{Sym}(k)} \text{sgn}(\tau) u_1^*(v_{(\sigma \circ \tau)(1)}) \cdot \dots \cdot u_k^*(v_{(\sigma \circ \tau)(k)})$$

$$\begin{aligned} &(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= \det(\dots) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Sym}(k+l)} \text{sgn}(\sigma) u_1^*(v_{\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot u_k^*(v_{\sigma(k)}) \cdot w_1^*(v_{\sigma(k+1)}) \cdot \dots \cdot w_l^*(v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

Jedes $\sigma \in \text{Sym}(k+l)$ hat eine eindeutige Zerlegung:

$$\sigma = \bar{\sigma} \circ \tau_l \circ \tau_k, \bar{\sigma} \in \text{Shuff}(k, l), \tau_k \in \text{Sym}(\{1, \dots, k\}), \tau_l \in \text{Sym}(\{k+1, \dots, k+l\})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\bar{\sigma} \in \text{Shuff}(k,l)} \text{sgn}(\bar{\sigma}) \sum_{\tau_l \in \text{sgn}(l)} \text{sgn}(\tau_l) \sum_{\tau_k \in \text{Sym}(k)} \text{sgn}(\tau_k) \\ &\quad u_1^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_k(1)}) \cdot \dots \cdot u_k^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_k(k)}) \cdot w_1^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_l(k+1)}) \cdot \dots \cdot w_l^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_l(k+l)}) \\ &= \sum_{\bar{\sigma} \in \text{Shuff}(k,l)} \text{sgn}(\bar{\sigma}) \left(\sum_{\tau_k \in \text{Sym}(k)} \text{sgn}(\tau_k) u_1^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_k(1)}) \cdot \dots \cdot u_k^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_k(k)}) \right) \\ &\quad \left(\sum_{\tau_l \in \text{sgn}(l)} \text{sgn}(\tau_l) w_1^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_l(k+1)}) \cdot \dots \cdot w_l^*(v_{\bar{\sigma} \circ \tau_l(k+l)}) \right) \\ &= \sum_{\bar{\sigma} \in \text{Shuff}(k,l)} \alpha(v_{\bar{\sigma}(1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k)}) \cdot \beta(v_{\bar{\sigma}(k+1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k+l)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge^k V^* &\cong \{f: V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}, k\text{-linear, alternierend}\} \\ v \in V &\quad \iota_v(f) := f(v, \cdot, \dots, \cdot): V^{k-1} \rightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \iota_v: \bigwedge^k V^* \rightarrow \bigwedge^{k-1} V^*$ *Einsetzungsoperator*

Beispiel 36.12.

$$\begin{aligned} \alpha \in \bigwedge^1 V^* \cong V^*, \quad \beta \in \bigwedge^1 V^* \cong V^* \\ \iota_v(\alpha \wedge \beta) \in \bigwedge^1 V^* \cong V^* \\ (\iota_v(\alpha \wedge \beta))(w) = (\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) \end{aligned}$$

Motivation 36.13. Wo sind die Mannigfaltigkeiten?

- $\rightsquigarrow \underbrace{T_p M}_{=: v}$ – Tangentialraum
- $\rightsquigarrow (T_p M)^{\otimes r} \otimes (T_p^* M)^{\otimes s} \dots$ – Tangentialraum

$$\bigwedge^k T_p M, \quad \bigwedge^k T_p^* M$$

Wenn man das „für alle $p \in M$ gleichzeitig“ macht, bekommt man Vektorbündel:

$$\begin{aligned} (TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s} &:= \bigsqcup_{p \in M} (T_p M)^{\otimes r} \otimes (T_p^* M)^{\otimes s} \\ &\bigwedge^k TM, \quad k = 0, \dots, \dim M \\ &\bigwedge^k T^*M, \quad k = 0, \dots, \dim M \\ &\bigwedge^{\cdot} T^*M = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \bigwedge^k T^*M \end{aligned}$$

Beweisskizze, dass alles Vektorbündel sind: da TM, T^*M Vektorbündel sind, gibt es für jedes $p \in M$ ein offene Umgebung $U, \pi_{TM}^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n, \pi_{T^*M}^{-1}(U) \cong U \times (\mathbb{R}^n)^*$

$$\pi^{-1}((TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}) \cong U \times (\mathbb{R}^n)^{\otimes r} \otimes ((\mathbb{R}^n)^*)^{\otimes s}$$

Die glatte Struktur auf $(TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}$ ist dadurch erklärt, dass es ein Diffeomorphismen ist. Analog für äußere Potenzen.

Definition 36.14. Ein *Tensorfeld* vom Typ (r, s) auf M ist ein Schnitt von $TM^{\otimes r} \otimes T^*M^{\otimes s}$.

Eine k -Differentialform auf M ist ein Schnitt vom $\bigwedge^k T^*M$.

$$\omega^k(M) := \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$$

Definition 36.15. Definition à la XIX. Jahrhundert: Eine Differentialform von Ordnung k ist eine Summe von Ausdrücken der Gestalt

$$f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

Beispiel 36.16.

$$xydx \wedge dy + zdz \wedge dx$$

$$xdx$$

36.1 Zusammenhang der Definition

Wenn (U, x) lokal Karte ist, $dx^1, \dots, dx^n \in \Gamma(T^*U)$. $\Rightarrow dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Gamma(\wedge^k T^*M) = \Omega^k(M)$. Das heißt jede $\omega \in \Omega^k(M)$, eingeschränkt auf U hat die Gestalt:

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_I \cdot \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{=: dx^I}, \quad \omega_I \in C^\infty(U)$$

Beispiel 36.17. $M = \mathbb{R}^n \rightsquigarrow xdy - ydx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

$$xdy \wedge dz - y^2 dz \wedge dx \in \Omega^2(\mathbb{R}^3), \quad xdx \in \Omega^1(\mathbb{R})$$

Naiv:

$$xdx = dd^2x$$

$$\int x \sin x dx = - \int x \cos x \dots$$

Äußere Ableitung:

$$\Omega^0(M) = \Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M)$$

Satz 36.18. Es gibt eine eindeutige bestimmte lineare Abbildung $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$. (d.h. $\forall k: d(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+1}(M)$) mit den folgenden Eigenschaften:

1. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d\beta$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$
2. $d^2 = d \circ d = 0$
3. $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M) \Rightarrow df =$ Differential von $f \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$

Idee 36.19.

$$d(x^2 dy - y dx) = d(x^2) \wedge dy - dy \wedge dx$$

$$= 2x dx \wedge dy - dy \wedge dx$$

$$= (2x + 1) dx \wedge dy$$

$$d(x^2 y dy) = 2xy dx \wedge dy + x^2 dy \wedge dy$$

Beweis Satz:

Existenz: Drücke ω in einer Karte wie in (*) aus und definiere ($I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $i_1 < \dots < i_k$)

$$dw|_U := \sum_I d\omega_I \wedge dx^I$$

Diese Konstruktion liefert $d: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^{*+1}(U)$, welche (1)–(3) erfüllt:

- (2): es reicht zu zeigen, dass $d(df \wedge dx^I) = 0$

$$\begin{aligned} d(df \wedge dx^I) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}}_{\text{symmetrisch in } k, j} \overbrace{dx^k \wedge dx^j}^{\text{antisymmetrisch in } k, j} \wedge dx^I \end{aligned}$$

\curvearrowright löschen sich aus

- (3): klar (hingucken)
- (1): es reicht zu zeigen, dass es für $\alpha = f dx^I$, $\beta = g dx^J$ gilt:

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg \cdot dx^I \wedge dx^J) \\ &= d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (gdf + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge (g dx^I) + (-1)^k f dx^I \wedge dg \wedge dx^I \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)\alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

d ist unabhängig von der Wahl von (U, x) : Ist (U', x') eine andere Karte, d' die zugehörige Abbildung. Dann: d, d' erfüllen (3) $\Rightarrow d = d'$ auf $C^\infty(U \cap U')$

$$\begin{aligned} d'(f \cdot dx^I) &\stackrel{(1)}{=} d'f \wedge dx^I + f d'(dx^I) \\ &= df \wedge dx^I + f d'(dx^I) \\ &= d(f dx^I) + f d'(dx^I) \end{aligned}$$

das heißt wir wollen, dass $d'(dx^I) = 0$

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{d}: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$ mit (1)–(3), (U, x) Karte. Für jedes $\omega \in \Omega^*(U)$, $\text{supp } \omega$ kompakt, kann man ω als eine Form auf M auffassen und $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$,

ω_I kompakt getragen \Rightarrow :

$$\begin{aligned} \tilde{d}\omega &= \sum_I \tilde{d}\omega_I dx^I \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_I (\tilde{d}(\omega_I) \wedge dx^I + d(dx^I)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_I \tilde{d}(\omega_I) \wedge dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_I d\omega_I \wedge dx^I \end{aligned}$$

das heißt: \tilde{d} stimmt mit unserer früheren Konstruktion überein, wenn $\text{supp } \omega \subseteq U$ kompakt ist.

Im Allgemeinen: Wenn $\omega \in \Omega^*(U)$, $p \in U$, so existiert $\varphi \in C^\infty(U[0,1])$ mit $\varphi \equiv 1$ auf Umgebungen von p , $\text{supp } \varphi$ kompakt:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\varphi \cdot \omega) &= d(\varphi\omega) \\ (\tilde{\varphi}_1\omega) &= \tilde{d}\varphi \wedge \omega + \underbrace{\varphi \tilde{d}\omega}_{= \varphi \wedge \tilde{d}\omega} = d\varphi \wedge \omega + \varphi \tilde{d}\omega \end{aligned}$$

Auswerten an p :

$$(d\varphi \wedge \omega)(p) + \varphi(p)\tilde{d}\omega(p) = d(\varphi\omega)(p) = d\omega(p)$$

Definition 36.20. d heißt *äußere Ableitung* oder auch *äußeres Differential*

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d^{(0)}} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^{(1)}} \Omega^2(M) \xrightarrow{d^{(2)}} \dots \xrightarrow{d^{(n-1)}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

$$d \circ d = 0 \Rightarrow \text{Ker } d^{k+1} \supseteq \text{Im } d^k$$

Frage 36.21. Gilt =?

Sei $f: M \rightarrow N$ glatt, $f^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ Pullbackabbildung.

$$(f^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega(p)(f_{*,p}X_1, \dots, f_{*,p}X_k), \quad X_i \in T_pM$$

In Koordinaten: (V, y) Karte von $N \Rightarrow \omega$ Linearkombination von

$$\varphi(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$$

(U, x) Karte von M . f in Koordinaten:

$$y^k = y^k(x^1, \dots, x^n) \Rightarrow f^*\omega = \varphi(y(x)) \cdot dy^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dy^{i_k}(x)$$

Beispiel 36.22.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \mapsto (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \end{cases}$$

(r_+, r_-, r_0) ist *Signatur* von b . Transformation $\Rightarrow S^T A S$

Beispiel 37.3.

$$q(x) = b(x, x) = x_1^2 + 10x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wie ist es mit schiefsymmetrischen Formen?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: J$$

Sei $\omega \in \bigwedge^2 V^*$. Dann gibt es eine Basis \mathcal{E} von V , sodass:

$$M_{\mathcal{E}}(\omega) = \begin{pmatrix} J & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- (0) Induktion über $\dim V$
- (1) $\omega = 0 \Rightarrow$ fertig
- (2) $\omega \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2 : \omega(v_1, v_2) = 1 \Rightarrow \omega(v_2, v_1) = -1, \omega(v_1, v_2) = \omega(v_2, v_2) = 0$

$$\Rightarrow \text{span}(v_1, v_2) =: U \subseteq V$$

$\omega|_U$ hat Matrix J in der Basis v_1, v_2

$$U^\perp := \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0 \forall v \in U\} = \{u \in V \mid \omega(v_2, u) = 0\}$$

zu zeigen: $V = U \oplus U^\perp$

- $u \in U \cap U^\perp \Rightarrow u = \alpha v_1 + \beta v_2, 0 = \omega(u, v_1) = -\beta, 0 = \omega(u, v_2) = \alpha \Rightarrow u = 0 \Rightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$
- $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U \Rightarrow \dim U^\perp + \dim U \geq \dim V$, ($\dim U^\perp$ durch 2 lineare Gleichungen bestimmt) \rightsquigarrow Wende Induktionsvoraussetzung auf U^\perp an.

Folgerung 37.4. Wenn ω nicht ausgeartet ist, ist $\dim V = 2k$

Definition 37.5. Eine *Symplektische Form* auf V ist eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform $\omega \in \bigwedge^2 V$. Eine Basis $\mathcal{E} = (e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_k, f_k)$ mit $M_{\mathcal{E}}(\omega) = \text{diag}(J, \dots, J)$ heißt *Symplektische Basis*.

Übung 37.6. Sei $\omega \in \wedge^2 V$, $\dim V = 2k$. ω ist symplektische Form $\Leftrightarrow \omega^k = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k\text{-mal}} \neq 0$
 $\in \wedge^{2k} V \cong \mathbb{R}$

- „ \Rightarrow “ ω symplektisch $\rightsquigarrow e_1, f_1, \dots, e_k, f_k$ symplektisch

$$\omega = \sum_{i=1}^k e_i^k \wedge f_i^* \Rightarrow \omega^k = e_1^* \wedge f_1^* \wedge \dots \wedge e_k^* \wedge f_k^* \cdot k! \neq 0$$

- „ \Leftarrow “ ω ausgeartet $\Rightarrow \omega = \sum_{i=1}^r e_i^* \wedge f_i^*$, $r < k$ $\xrightarrow{\text{Schubfachprinzip}} \omega^k = 0$

Wenn $B^* = (v_1^*, \dots, v_{2k}^*)$ irgendeine Basis von V^* , die die Orientierung festlegt, gilt:

$$\omega^k = k! \text{Pf}(M_B(\omega)) v_1^* \wedge \dots \wedge v_{2k}^*$$

(Pf ist die Pfaffsche Determinante)

–

W Vektorraum über \mathbb{C} . Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt auf W . *Reelifizierung* $W_{\mathbb{R}}$ von $W \rightsquigarrow$ betrachte als Vektorraum über \mathbb{R} $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} W$.

Frage 37.7.

- Welche Struktur gibt es auf $W_{\mathbb{R}}$?
- Wie erkennt man, dass ein \mathbb{R} -Vektorraum eine Reelifizierung eines \mathbb{C} -Vektorraums ist?

Antwort 37.8. Von W vererbt $W_{\mathbb{R}}$ die Multiplikation mit i als \mathbb{R} -lineare Abbildung:

Definition 37.9. Eine *komplexe Struktur* I auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $I: V \rightarrow V$ mit $I^2 = -\text{id}_V$.

Insbesondere hat $W_{\mathbb{R}}$ eine komplexe Struktur ($I(\omega) := i \cdot \omega$). Das Skalarprodukt von W gibt auf $W_{\mathbb{R}}$ zwei Strukturen

$$\begin{aligned} g(v, w) &:= \Re \langle v, w \rangle \\ \omega(v, w) &= \Im \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

g ist symmetrische Bilinearform, ω ist eine schiefsymmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} g(Iv, w) = i\omega(Iv, w) &= \langle iv, w \rangle = i \langle v, w \rangle = i(g(v, w) + i\omega(v, w)) \\ &= -\omega(v, w) + ig(v, w) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(Iv, w) &= -\omega(v, w) & (*) \\ \omega(Iv, w) &= g(v, w) & (**) \end{aligned}$$

Behauptung 37.10. g ist Skalarprodukt, ω ist symplektische Form:

$$g(v, v) = \langle v, v \rangle \geq 0, \quad = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

I invertierbar ($I^4 = \text{id}_V$), g nicht ausgeartet

$$\omega(v, w) = 0 \forall w \Rightarrow g(Iv, w) = 0 \forall w \Rightarrow Iv = 0^{I \text{ invertierbar}} = 0$$

Fazit 37.11. Aus dem Skalarprodukt auf W ist ein Tripel (I, g, ω) auf $W_{\mathbb{R}}$ entsanden, welches Kompatibilitätsbedingungen $(*)$, $(**)$ erfüllt, *Köhler-Tripel*.

letztes Mal: V \mathbb{R} -Vektorraum, $\dim V = 2k \rightsquigarrow \omega \in \wedge^2 V^*$ symplektisch, wenn es nicht ausgeartet ist

Beispiel 37.12. $\omega = \sum_{i=1}^k e_i^* \wedge f_i^*$, $B = (e_1, f_1, \dots, e_k, f_k)$ Basis in V

$$M_B(\omega) = \begin{bmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{bmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivation 37.13. Beispiel für symplektische Geometrie: Sei Q eine Mannigfaltigkeit (Karte (U, q)) $\dim Q = n$.

$$\begin{array}{c} T^*Q \\ \downarrow \\ Q \end{array}$$

$\dim T^*Q = 2n$ emphTautologische 1-Form α auf T^*Q : Für $\xi \in T_p T^*Q$ ist $\alpha(\xi) := p(D_p \pi(\xi)_{\in T_{\pi(p)}Q}) \in \mathbb{R}$ Wie sieht α in Koordinaten aus? Die Karte (u, q) induziert Karte (\tilde{U}, q, p) auf T^*Q mit lokalen Koordinaten $\underbrace{q^1, \dots, q^n}_{\text{Koordinaten } q}, \underbrace{p_1, \dots, p_n}_{\text{Koordinaten } p}$

p_1, \dots, p_n Koordinaten p in der Basis dq^1, \dots, dq^n Es gilt $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^n \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \in TT^*Q \\ \Rightarrow D_p \pi(\xi) &= \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial q^i} \in TQ \end{aligned}$$

Der Koordinatenausdruck für $p(D_p \pi(\xi))$ ist

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i dq^i \right) \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial q^j} \right) = \sum_{i=1}^n p_i \xi_i = \left(\sum_{i=1}^n p_i dq^i \right) (\xi)$$

Alternativbezeichnung: α ist die *Kontaktform* auf T^*Q .

Definition 37.14.

$$\omega := d\alpha \left(\underset{\text{in Koordinaten}}{\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i} \right) \in \Omega^2(T^*Q)$$

heißt *kanonische symplektische Form* auf T^*Q

Bemerkung 37.15. Für jedes $p \in T^*Q$ ist $\omega(p) \in \wedge^2(T_p T^*Q)^*$, $\dim T_p T^*Q = 2n$ eine symplektische Form.

Definition 37.16. Eine Mannigfaltigkeit M von Dimension $2n$ zusammen mit einer 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$, die:

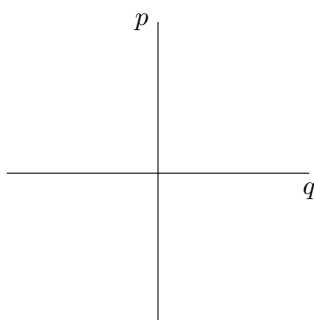
1. in jedem Punkt nicht ausgeartet ist (also symplektische Form auf $T_m M$ definiert) und
2. *geschlossen* ist: $d\omega = 0$ erfüllt, heißt *symplektische Mannigfaltigkeit*.

Beispiel 37.17. $M = T^*Q$ ist symplektisch für jede Mannigfaltigkeit Q ($\omega = d\alpha$ kanonische symplektische Form)

Bemerkung 37.18. In der Physik heißt T^*Q *Phasenraum*, p_1, \dots, p_n heißen die zu q_1, \dots, q_n gehörenden Impulse

Beispiel 37.19.

$$Q = \mathbb{R} \Rightarrow M = T^*Q \cong \mathbb{R}^2$$



Wenn (M, ω) symplektisch, ist ω nicht ausgeartet. \rightsquigarrow erhalten musikalische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \sharp & : T^*M \rightarrow TM \\ \flat & : TM \rightarrow T^*M \\ v & \mapsto \omega(\cdot, v) \\ \sharp & = \flat^{-1} \end{aligned}$$

Sei $H \in C^\infty(M) \rightsquigarrow dH \in \Gamma(T^*M) \xrightarrow{\sharp} \Gamma(TM)$, $dH \mapsto X_H$. X_H heißt *Hamilton-Vektorfeld* zur (Hamilton-)Funktion H . Alternativbezeichnung: $X_H = \text{sgrad } H$ („Schiefgradient“)

Beispiel 37.20.

$$Q = \mathbb{R}, M = T^*Q = \mathbb{R}^2, \omega = dp \wedge dq$$

$$H = H(q, p) \Rightarrow dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp$$

$$\sharp: T^*M \rightarrow TM : d \mapsto v : dp \mapsto w$$

$$(dp \wedge dq)(\cdot, v) = \omega(\cdot, v) = dq(\cdot), (dp \wedge dq)(\cdot, w) = \omega(d, w) = dp(\cdot)$$

$$V \text{ Basis } e = \frac{\partial}{\partial p}, f = \frac{\partial}{\partial q}, \omega = e^* \wedge f^* = dp \wedge dq$$

$$(e^* \wedge f^*)(\cdot, v) = f^*(\cdot), v = \pm e, w = \pm f$$

$$(dp \wedge dq) \left(z, \frac{\partial}{\partial p} \right) = \det \begin{pmatrix} dp(z) & dq(z) \\ \underbrace{dp(\frac{\partial}{\partial p})}_{=1} & \underbrace{dq(\frac{\partial}{\partial p})}_{=0} \end{pmatrix} = -dq(z)$$

$$(dp \wedge dq) \left(z, \frac{\partial}{\partial q} \right) = \det \begin{pmatrix} dp(z) & dq(z) \\ dp(\frac{\partial}{\partial q}) & dq(\frac{\partial}{\partial q}) \end{pmatrix} = -dq(z)$$

$$\Rightarrow v = \frac{\partial}{\partial p}, w = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\rightarrow X_H = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}$$

Die Differentialgleichung zu X_H :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

→ Hamilton-Gleichung der klassischen Mechanik

Bemerkung 37.21. physikalischer Input: H = Gesamtenergie des mechanischen Systems, ausgedrückt durch Impulse und Koordinaten. Typisch ist dabei die Form $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, Kinetische Energie: $\frac{p^2}{2m}$, potential Energie: $V(q)$

Beispiel 37.22.

$$H = \frac{p^2 + q^2}{2} \rightsquigarrow \dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q$$

TODO Bildchen 47

Beobachtung: Integralkurven verlaufen in Nivaufächen von $H \Rightarrow$ bleibt erhalten (ist Erhaltungsgröße)

Suche nach Erhaltungsgrößen motiviert:

Definition 37.23. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Eine Funktion φ heißt *Erhaltungsgröße* von X (= vom Fluss von X), wenn $\mathcal{L}_X = 0 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^* \varphi)$

Wenn (M, ω) symplektisch, $X = X_H$ Hamilton-Vektorfeld:

Definition 37.24. Die *Poisson-Klammer* von φ und H ist die Lie-Abbildung von φ und X_H : $\{\varphi, H\} := \mathcal{L}_{X_H}\varphi$. φ ist also eine Erhaltungsgröße $\Leftrightarrow \{\varphi, H\} = 0$. Nun erinnern wir uns daran, dass $\mathcal{L}_X\varphi = X(\varphi) \Rightarrow \{\varphi, H\} = X_H(\varphi) = d\varphi(X_H)$

$$X_H = dH^\sharp \quad Y(dh^\sharp) = \omega(Y, dH)$$

$$\{\varphi, H\} = X_H(\varphi) = d\varphi(X_H) = (X_\varphi)^\flat(X_H) = \omega(X_H, X_\varphi) = \omega(dH^\sharp, d\varphi^\sharp)$$

Es folgt: $\{\varphi, H\} = -\{H, \varphi\}$ (Poisson-Klammer antisymmetrisch) (φ Erhaltungsgröße für $X_H \Leftrightarrow H$ Erhaltungsgröße für X_φ)

$$\begin{aligned} \{\varphi_1\varphi_2, H\} &= \omega(dH^\sharp, (d(\varphi_1, \varphi_2))^\sharp) \\ &= \omega(dH^\sharp, (\varphi_1 d\varphi_2 + \varphi_2 d\varphi_1)^\sharp) \\ &= \varphi_1\omega(dh^\sharp, d\varphi_2^\sharp) + \varphi_2\omega(dh^\sharp, d\varphi_1^\sharp) = \varphi_1\{\varphi_2, H\} + \{\varphi, H\}\varphi_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{\cdot, H\} =: \partial_H(\cdot)$ ist eine Derivation von $C^\infty(M)$ (auch klar nach Definition)

Jacobi-Identität für die Poisson-Klammer:

$$\{\{\varphi_1, \varphi_2\}, \varphi_3\} + \{\{\varphi_2, \varphi_3\}, \varphi_1\} + \{\{\varphi_3, \varphi_1\}, \varphi_2\} = 0$$

Beweis: Übung (schwierig, aber gut Übung)

Ausdruck der Poisson-Klammer in Koordinaten auf $M = T^*Q$:

$$\{\varphi, \psi\} = \omega(d\psi^\sharp, d\varphi^\sharp)$$

$$X_\varphi = d\varphi^\sharp = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial\varphi}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\Rightarrow \{\varphi, \psi\} = -\{\psi, \varphi\} = -X_\varphi(\psi) = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} \frac{\partial\psi}{\partial q^i} - \frac{\partial\varphi}{\partial q^i} \frac{\partial\psi}{\partial p_i} \right)$$

Wir sehen: $(C^\infty(M), \{\dots, \dots\})$ ist eine Lie-Algebra.

Proposition 37.25. Die Abbildung $X_\cdot = (d(\cdot))^\sharp: \begin{cases} C^\infty(M) \rightarrow \Gamma(TM) \\ \varphi \mapsto X_\varphi \end{cases}$ ist ein Anti-Homomorphismus von Lie-Algebren $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\}) \rightarrow (\Gamma(TM), [\cdot, \cdot])$.

Beweis:

haben zu zeigen: $[X_\varphi, X_\psi] = -X_{\{\varphi, \psi\}}$. Dazu setze $\theta := \{\varphi, \psi\}$.

$$\begin{aligned} X_\theta(\Xi) &= \{\Xi, \theta\} \\ &= \{\Xi, \{\varphi, \psi\}\} \stackrel{\text{Jacobi-Identität}}{=} \{\{\Xi, \varphi\}, \psi\} - \{\{\Xi, \psi\}, \varphi\} \\ &= X_\psi(X_\varphi(\Xi)) - X_\varphi(X_\psi(\Xi)) = [X_\psi, X_\varphi](\Xi) \\ &= -[X_\varphi, X_\psi](\Xi) \end{aligned}$$

Wenn man jetzt ein mechanisches System mit Hamilton-Funktion H studiert, braucht man möglichst viele Erhaltungsgrößen (= Bewegungsintegrale)

Beobachtung 37.26. Wenn φ_1, φ_2 Erhaltungsgrößen sind: $\{\varphi_1, H\} = \{\varphi_2, H\} = 0$
 $\Rightarrow \{\varphi_1, \varphi_2\}$ ist Erhaltungsgröße, denn

$$\{\{\varphi_1, \varphi_2\}, H\} + \underbrace{\{\{\varphi_2, H\}, \varphi_1\}}_{=0} + \underbrace{\{\{H, \varphi_1\}, \varphi_2\}}_{=0} = 0$$

Frage 37.27. Wenn wir über alle Erhaltungsgrößen gefunden haben, was können wir daraus über unser System lernen? (Beobachtung: Erhaltungsgrößen = $\{\varphi \in C^\infty(M) \mid \{\varphi, H\} = X_\#(\varphi) = 0\}$)

$X(\varphi) = d\varphi(X) = 0 \Rightarrow X$ tangential zur Niveauläche $M = \{m \in M \mid \varphi(m) = c\}$
 $\dim M_{\varphi,c} = \dim M - 1$ (meistens) \rightarrow gewinnen eine Dimension.

37.1 Satz von Liouville

\curvearrowright magisches Orakel

TODO Bildchen

Satz 37.28. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^\infty(M)$, so dass:

1. $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0, i, j = 1, \dots, n$
2. die $d\varphi_i$ sind linear unabhängig in jedem Punkt. Seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,
 $N := M_{\substack{\varphi_1, \dots, \varphi_n \\ c_1, \dots, c_n}} = \{m \in M \mid \varphi_i(m) = c_i, i = 1, \dots, n\}$

Dann gilt:

1. N ist Untermannigfaltigkeit von M , alle X_{φ_i} sind tangential zu N . Wenn $\dim M = 2n$ dann gilt:
2. Wenn N kompakt, zusammenhängend $\Rightarrow N \cong \Pi^n = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \pmod{2\pi}\}$ der n -dimensionale Torus und die Vektorfelder $X_{\varphi_i}|_N$ haben die Form $\frac{d\theta}{dt} = \omega_i, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), \omega_i = (\omega_i^{(1)}, \dots, \omega_i^{(n)})$ ($\Rightarrow \theta = t \cdot \omega \pmod{2\pi}, t \in \mathbb{R}$)

Bemerkung 37.29. In physikalisch relevanten Fällen wo $\varphi_1 = H$ die Energie des Systems ist, ist öfter (nicht, wenn z.B. kein potential) N automatisch kompakt.

37.2 Beispiel: lustiger Kreisel

Beispiel 37.30. 3 Freiheitsgrade, Q der Konfigurationsraum $\Rightarrow \dim Q = 3$, $\dim M = \dim T^*Q = 6$, vergleiche Lagrange-Kreisel. $Q = \text{SO}(3)$ (bzw. Torso von $\text{SO}(3)$) kann durch die Tischplatte durch

Erhaltungsgrößen: $\varphi_1 = H$ (Energie), $\varphi_2 = \mu_z$ (Drehimpuls bzgl. der z -Achse), $\varphi_3 = \mu_3$ (Eigendrehimpuls)

$\theta_1 =$ Eigendrehung, $\theta_2 =$ Präzission, $\theta_3 =$ Notation

Beweis zu Liouville:

N ist Untermannigfaltigkeit nach dem Satz vom regulären Wert. Die Vektorfelder X_{φ_i} sind tangential zu N , weil

$$X_{\varphi_i}(\varphi_j) = \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$$

$\Rightarrow X_{\varphi_i}$ tangential zu N . Wenn $\dim M = 2n \Rightarrow \dim N = 2n - n = n$. Auf N haben wir jetzt n Vektorfelder $X_{\varphi_1, \dots, X_{\varphi_n}}$, die kommutieren:

$$[X_{\varphi_i}, X_{\varphi_j}] = 0$$

da

$$[X_{\varphi_i}, X_{\varphi_j}] = X_{\{\varphi_j, \varphi_i\}}, \quad \{\varphi_j, \varphi_i\} = 0$$

Sei N kompakt, zusammenhängend \rightsquigarrow Betrachte die Wirkung von $G = \mathbb{R}^n \curvearrowright N$ (durch Flüsse von X_{φ_i} 's).

Behauptung: $\mathbb{R}^n \curvearrowright N$ transitiv:

TODO Bildchen 49

weil lokal ein Diffeomorphismus

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni 0 \rightarrow p \in V \subseteq N$$

$\Rightarrow N = \mathbb{R}^n / H$, $H \leq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Untergruppe, \mathbb{R}^n / H kompakt.

$\xrightarrow{\text{Übung}} H \cong \mathbb{Z}^n \Rightarrow N = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \cong \Pi^n$

$\theta_1, \dots, \theta_n$ können durch Wirkung definiert werden.