

Gleitkommazahlen

Sonderübung

Luise Zieger & Lea Happel

PROG Sonderübung

June 26, 2019

1. Zahlensysteme

- Stellenwertsysteme
- Konversion von Zahlensystemen
 - Konversion von einem beliebigen Zahlensystem ins Dezimalsystem
 - Konversion vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlensystem
 - Konversion von einem beliebigen Zahlensystem in ein anderes
- Übungsaufgaben

2. Gleitkommazahlen

- Übungsaufgaben

Stellenwertsysteme

Ein Stellenwertsystem ist ein Zahlensystem, in welchem mithilfe endlich vieler Symbole unendlich viele Zahlen dargestellt werden können.

Der Wert der Zahl $x = [m_{-k} m_{-k+1} \dots m_{-1} m_0 . m_1 m_2 \dots m_n]_{Basis}$, $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich dann folgendermaßen:

$$\text{Wert } x = \sum_{i=-k}^n m_i * Basis^{-i}$$

Die Basis B besteht aus genau $B > 1$ vielen Symbolen, welchen ein Wert zwischen 0 und $B - 1$ zugeordnet wird. Falls $B > 10$, dann werden alle Zahlen ab 10 durch Großbuchstaben dargestellt.

Die wichtigsten Zahlensysteme sind das Binärsystem, das Dezimalsystem, das Hexadezimalsystem und das Oktalsystem.

Von einem beliebigen Zahlensystem ins Dezimalsystem

Gegeben ist die Zahl $x = [m_{-k} m_{-k+1} \dots m_{-1} m_0 . m_1 m_2 \dots m_n]_{\text{Basis}}$ in einer beliebigen Basis.

Also ist der Wert $x = \sum_{i=-k}^n m_i * \text{Basis}^{-i}$

Beispiel:

$$[134.5]_6 = 1 * 6^2 + 3 * 6^1 + 4 * 6^0 + 5 * 6^{-1} =$$

Von einem beliebigen Zahlensystem ins Dezimalsystem

Aufgabe:

Konvertiere $[11011011]_2$ in das Dezimalsystem.

Von einem beliebigen Zahlensystem ins Dezimalsystem

Aufgabe:

Konvertiere $[11011011]_2$ in das Dezimalsystem.

Lösung:

$$[11011011]_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = [219]_{10}$$

Vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlensystem

Teile die Dezimalzahl mit Rest durch die Basis des Zahlensystems, in welches wir konvertieren wollen. Der Divisionsrest entspricht der nächsten Ziffer der umgewandelten Zahl (von rechts nach links). Abbruch, falls das Ergebnis = 0 ist.

Beispiel:

$[115]_{10}$ soll in das 6er-System umgewandelt werden:

$$115 \div 6 = 19 \text{ Rest } 1$$

$$19 \div 6 = 3 \text{ Rest } 1$$

$$3 \div 6 = 0 \text{ Rest } 3$$

$$\implies [115]_{10} = [311]_6$$

Vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlensystem

Aufgabe:

Konvertiere $[1499]_{10}$ in das Hexadezimalsystem.

Vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlensystem

Aufgabe:

Konvertiere $[1499]_{10}$ in das Hexadezimalsystem.

Lösung:

$$1499 \div 16 = 93 \text{ Rest } (B = 11)$$

Vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlensystem

Aufgabe:

Konvertiere $[1499]_{10}$ in das Hexadezimalsystem.

Lösung:

$$1499 \div 16 = 93 \text{ Rest } (B = 11)$$

$$93 \div 16 = 5 \text{ Rest } (D = 13)$$

Vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlensystem

Aufgabe:

Konvertiere $[1499]_{10}$ in das Hexadezimalsystem.

Lösung:

$$1499 \div 16 = 93 \text{ Rest } (B = 11)$$

$$93 \div 16 = 5 \text{ Rest } (D = 13)$$

$$5 \div 16 = 0 \text{ Rest } 5$$

Vom Dezimalsystem in ein beliebiges Zahlensystem

Aufgabe:

Konvertiere $[1499]_{10}$ in das Hexadezimalsystem.

Lösung:

$$1499 \div 16 = 93 \text{ Rest } (B = 11)$$

$$93 \div 16 = 5 \text{ Rest } (D = 13)$$

$$5 \div 16 = 0 \text{ Rest } 5$$

$$\implies [1499]_{10} = [5DB]_{16}$$

Von einem beliebigen Zahlensystem in ein anderes

Variante 1:

Wandle zunächst in das Dezimalsystem um und anschließend in das Zielsystem.

Variante 2:

Konvertiere die Zielbasis in das Startsystem. Dividiere wiederholt mit Rest, um den ganzzahligen Anteil zu bestimmen bzw. multipliziere, um den gebrochenen Anteil zu bestimmen.

Beispiel für Variante 2

Aufgabe: Konvertiere $x = [10111011011.1100011]_2$ in das Hexadezimalsystem.

Konversion des ganzzahligen Anteils von x:

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1_2 \div 1\ 0\ 0\ 0\ 0_2 = 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
 -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
 -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 1 = B_{16} \quad (\text{Rest})
 \end{array}$$

Beispiel für Variante 2

$$\begin{array}{r}
 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1_2 \div 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0_2 = 1 \ 0 \ 1 \\
 - 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 - 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 1 \ 1 \ 0 \ 1 = D_{16} \quad (\text{Rest})
 \end{array}$$

$$1 \ 0 \ 1_2 \div 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0_2 = 0 \text{ Rest } 5$$

$$\Rightarrow [10111011011]_2 = [5DB]_{16}$$

Beispiel für Variante 2

Konversion des gebrochenen Anteils von x:

$$\begin{array}{r}
 0.110001_2 \times 10000_2 = 1100.011 \\
 0.1100011 \\
 0.0000000 \\
 0.0000000 \\
 0.0000000 \\
 0.0000000 \\
 1100.011 \quad m_1 = C
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0.011_2 \times 10000_2 = 110.000 \\
 0.011 \\
 0.000 \\
 0.000 \\
 0.000 \\
 0.000 \\
 110.000 \quad m_2 = 6
 \end{array}$$

$$\Rightarrow [0.1100011]_2 = [0.C6]_{16}$$

$$\Rightarrow [10111011011.1100011]_2 = [5DB.C6]_{16}$$

Übungsaufgaben

Wandle folgende Zahlen vom Dezimalsystem in das Binärsystem um und bilde das Zweierkomplement. (Für das Zweierkomplement wählen wir ein 8-bit Format (1 VZ bit + 7 wertende Stellen))

- 103
- 88

Wandle folgende Zahl vom Binärsystem in das Dezimalsystem um.

- [110111001]

Gleitkommazahlen

Wir betrachten das 8-bit GKZ-Format $R(2,5, -1, +2)$.

- 1 Bit für das Vorzeichen s
- 2 Bit für den Exponenten e zur Basis 2 (nicht-negativ gespeichert)
- 5 Bit für die Mantisse $m = 0.m_1m_2m_3m_4m_5$

Für die GKZ x gilt: $x = (s, m, e) = (-1)^s \cdot \sum_{i=1}^5 m_i 2^{-i} \cdot 2^e$

Gleitkommazahlen

Aufgabe: Wandle folgende GKZ in Dezimalzahlen um:

- $0.00001 \cdot 2^0$
- $0.11000 \cdot 2^{-1}$
- $0.10001 \cdot 2^0$
- $0.11111 \cdot 2^2$

Welche dieser GKZ sind normalisiert, welche denormalisiert?

Gleitkommazahlen

Aufgabe: Konvertiere die folgenden Dezimalzahlen in das angegebene GK-Format.

- 2.5
- 0.125
- 1.8125
- 3.375

Gleitkommazahlen

Aufgabe: Berechne die möglichen Ergebnisse der folgenden Beispielrechnungen im GKZ-Format (Rundungsmodus to nearest).

- $1.25 + 0.125$
- $3.125 + 0.0625$
- $3.25 + 0.546875$
- $2.25 + 0.03125$